

Kognitywistyka, zadania 12, endomorfizmy

1. Zbadaj, dla których wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ macierz obrotu płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o kąt α w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara ma chociaż jeden wektor własny.
2. Zbadaj, czy wektor: a) $(1, 2)$, b) $(1, 3)$, c) $(2, 5)$ jest wektorem własnym macierzy $\begin{pmatrix} -28 & 10 \\ -75 & 27 \end{pmatrix}$. W przypadku odpowiedzi pozytywnej znajdź odpowiadającą mu wartość własną.
3. Sprawdź, czy liczba $\lambda = 2$ jest wartością własną macierzy: a) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Wykaż, że jeśli A jest macierzą nieosobliwą, to A i A^{-1} mają te same wektory własne. Podaj związek między wartościami własnymi.
5. Wektor $\alpha = (4, 2, 3)$ jest wektorem własnym macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 4 \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Oblicz $4a + 2b + 3c$.
6. Wektor α jest wektorem własnym macierzy A i B . Czy α jest wektorem własnym macierzy: a) $A + B$, b) AB ?
7. Znajdź wektory własne macierzy: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 6 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, d) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 0 & -5 & 12 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
8. Znajdź wektory własne macierzy A^{11} , jeśli: a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
9. Znajdź wektory własne macierzy A^{12} , jeśli: a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
10. Liczba λ jest wartością własną macierzy nieosobliwej A . Wykaż, że liczba $\frac{1}{\lambda}$ jest wartością własną macierzy A^{-1} .
11. Wykaż, że wektory własne $w_1, \dots, w_k$ macierzy kwadratowej A odpowiadające różnym wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tworzą układ lnz.
12. Wektory u, w są wektorami własnymi macierzy A i odpowiadają: a) różnym, b) równym wartościom własnym. W każdym z tych przypadków zbadaj, czy wektor $u + v$ jest wektorem własnym macierzy A .
13. Znajdź bazę $\mathbb{R}^2$ złożoną z wektorów własnych macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, a następnie znajdź wzór na $A^n, n \in \mathbb{N}$.
14. Wiedząc, że wektory $u = (1, 2, 1), v = (4, -2, -1), w = (2, 4, -7)$ są wektorami własnymi macierzy $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ zapisz macierz w postaci $A = CDC^{-1}$, gdzie C jest macierzą nieosobliwą, a D diagonalną.
15. Zbadaj, czy macierz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ jest diagonalizowalna.
16. Oblicz $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$.
17. Znajdź macierz nieosobliwą C oraz macierz diagonalną D takie, że:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = CDC^{-1}.$$