

1. Niech $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Znajdź $\lim a_n$ oraz $\lim b_n$. b) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$. c) Znajdź $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$ i wywnioskuj rozbieżność szeregu $\sum \frac{1}{n}$. d) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}))$.
2. Znajdź granicę $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - \sqrt{2x^2 - 4}}{x + 2}$ lub wykaż, że nie istnieje.
3. Wykaż, że dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ równanie $x^5 - x^3 + 3ax - 1 = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek dodatni.
4. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} & \text{dla } x > 0, \\ e^x - 1 & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$ a) Zbadaj, czy funkcja f posiada funkcję pierwotną. Jeśli tak, to wyznacz funkcję pierwotną, której wykres przechodzi przez punkt $(1,0)$. b) Oblicz $\int_{-2}^3 f(x)dx$.
5. Niech $f(x) = \frac{(x\sqrt{3}-2)^4}{4\sqrt{3}}$ dla $x \in [-2, 2]$. a) Znajdź przedziały monotoniczności funkcji f . b) Wykaż, że styczne do wykresu f w punktach $A = (\frac{\sqrt{3}}{3}, f(\frac{\sqrt{3}}{3}))$, $B = (\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ są prostopadłe. c) Znajdź $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (f'(x))^{\frac{1}{x-\sqrt{3}}}$.
6. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełnia warunki $f(1, 2, 3) = (2, 1)$, $f(2, 3, 4) = (2, 4)$. a) Oblicz $f(8, 13, 18)$. b) Znajdź wymiar jądra f .
7. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ spełnia warunki $f(1, 2) = (2, 1, 0, -1)$, $f(2, 3) = (2, 4, 6, 8)$. Znajdź $M(f)_{\text{st}}^{\text{st}}$.
8. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ma macierz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ w bazach $A : x^3 + x^2, x^2 - x, x + 1, 1$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ oraz $B : (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$. a) Znajdź bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia f . b) Znajdź $f(2x^3 - 3x^2 + 7)$.
9. Wykaż, że przekształcenie liniowe $f : V \rightarrow W$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker f = \{0\}$.
10. Znajdź związek między wyznacznikiem macierzy endomorfizmu $f : V \rightarrow V$ w bazie A , a wyznacznikiem macierzy endomorfizmu $f : V \rightarrow V$ w bazie B .
11. Niech $u = (a, b, c), w = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ oznaczają dowolne wektory. a) Wykaż, że wektor $u \times w := (\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix})$ jest prostopadły do obu wektorów u, w . Wektor $u \times w$ nazywa się iloczynem wektorowym wektorów u i w . b) Wykaż, że wyznacznik macierzy, której wierszami są kolejno wektory $u, w, u \times w$ jest nieujemny. c) Wykaż, że długość wektora $u \times w$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach u, w .
12. Znajdź wektor kierunkowy prostej opisanej układem równań $\begin{cases} x - 2y + z = 5, \\ 3x + y - z = 0. \end{cases}$
13. Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. a) Napisz wielomian charakterystyczny macierzy A . Oblicz $A^2 - 2A + 3I$. b) Oblicz A^4 . c) Oblicz A^{-1} . d) Uogólnij podpunkt a) na przypadek dowolnej macierzy $B \in M(2 \times 2)$.