

Kognitywistyka, zadania 11, przestrzenie i przekształcenia liniowe

1. a) Czy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową?
b) Czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = 3x - 2$ jest przekształceniem liniowym?

2. Wektor v ma w bazie A przestrzeni V kolumnę współrzędnych $v_A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. a) Znajdź wymiar

przestrzeni V . b) Baza B przestrzeni V powstała z bazy A przez wypisanie jej wektorów w odwrotnym porządku. Znajdź kolumnę współrzędnych v_B .

3. Znajdź bazę przestrzeni $W = \{w \in \mathbb{R}[x]_5 : w(1) = w(2) = 0\}$ oraz kolumnę współrzędnych wielomianu $v(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ w tej bazie.
4. Sprawdź, że przekształcenie $f : \mathbb{R}[x]_5 \rightarrow \mathbb{R}[x]_5$ określone wzorem $f(w) = w'$ jest liniowe. Oblicz wymiar jądra i wymiar obrazu.
5. Sprawdź, że przekształcenie $f : \mathbb{R}[x]_4 \rightarrow \mathbb{R}[x]_4$ określone wzorem $f(w) = x \cdot w''$ jest liniowe. Opisz jądro i obraz i oblicz ich wymiary.
6. Sprawdź, czy przekształcenie $f : \mathbb{R}[x]_5 \rightarrow \mathbb{R}[x]_5$ określone wzorem $f(w) = w' + x$ jest liniowe. Jeśli jest, to oblicz wymiar jądra i wymiar obrazu.
7. Sprawdź, czy przekształcenie $f : \mathbb{R}[x]_5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadane wzorem $f(w) = (w(0), w'(0), w''(0))$ jest liniowe. Jeśli jest, to oblicz wymiar jądra i wymiar obrazu.
8. Znajdź obraz wektora $(1, 3, 7)$ przy przekształceniu liniowym f wiedząc, że $f(1, 2, 3) = 3x^2 - 7x + 4$ oraz $f(1, 1, -1) = x^3 - 113$.
9. Opisz wzorem obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ wokół punktu $(0,0)$ o kąt prosty: a) przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. b) zgodnie z ruchem wskazówek zegara.
10. Opisz wzorem obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ wokół punktu $(0,0)$ o kąt $\arctg(\frac{3}{4})$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
11. Opisz wzorem przekształcenie płaszczyzny $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że $\sigma(1, 2) = (1, 2)$, $\sigma(2, -1) = (-2, 1)$.
12. Wyznacz bazę oraz wymiar jądra i wymiar obrazu przekształcenia liniowego φ .
 - a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y, z)) = (x + y - 3z, 0)$.
 - b) $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((w, x, y, z)) = (x - 2y, 3y + 3z, x - y + z)$.
 - c) $\varphi : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(ax^2 + bx + c) = (2c - a - 3b, a - b, c - 2a)$.
 - d) $\varphi : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(w) = (0, 0, 0)$.
 - e) $\varphi : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$, $\varphi(w) = w$
13. Znajdź kolumnę współrzędnych wielomianu $w(x) = 2 - x - x^2$ w bazie $B : 1 + x, 1 + x^2, x^2 + x$ przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.
14. Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest dane wzorem $\phi(x, y) = (3x + y, 2y)$. Znajdź macierz ϕ : a) w bazie standardowej, b) w bazie $B : (2, 1), (5, 3)$.

15. Niech B oznacza bazę $1, 1+x, 1+x+x^2$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$. Niech $f : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza przekształcenie liniowe określone wzorem $f(w) = (w(1), w'(2))$ dla $w \in \mathbb{R}[x]_2$. Znajdź macierz $M(f)_B^{\text{st}}$.
16. Macierz przekształcenia liniowego $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ w bazach $A : (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $B : x^3-1, x^2-1, x-1, 1$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ jest równa $M(f)_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Znajdź $f(1, 2, 3)$.
17. Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ma macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ w bazach standardowych. Znajdź macierz ϕ w bazach $B : (2, 1, 1), (3, 1, 0), (1, 0, 0)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $C : (4, 1), (1, 0)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$.
18. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ma w bazach $A : (1, 1, 0), (0, 1, 2), (0, 0, 1)$, $B = (1, 1), (2, -1)$ macierz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Znajdź macierz f w bazach standardowych oraz wzór f .
19. Znajdź macierz przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ danego wzorem $\phi(x, y) = (-10x + 18y, -6x + 11y)$, w bazie $(3, 2), (2, 1)$ korzystając: a) bezpośrednio z definicji macierzy przekształcenia. b) ze wzoru na macierz złożenia przekształceń.