

Kognitywistyka, zadania 10, wyznaczniki

- Oblicz wyznaczniki: $\alpha) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \gamma) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 15 & 20 & 30 \\ -9 & 6 & 0 \end{vmatrix}, \delta) \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 15 & 24 & 31 \\ 7 & 11 & 19 \end{vmatrix},$
 $\varepsilon) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \zeta) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \eta) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \vartheta) \begin{vmatrix} 11 & 12 & 20 & 1 \\ 21 & 10 & 30 & 15 \\ 22 & 14 & 30 & 16 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$
- Wykaż, że wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi wyrazów stojących na przekątnej.
- Dobierz tak wartość $a \in \mathbb{R}$, żeby $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & a \end{vmatrix} = 1$ lub wykaż, że nie ma takiej wartości a .
- Oblicz rząd macierzy $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{pmatrix}$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.
- Dobierz tak wartość $a \in \mathbb{R}$, żeby rząd macierzy $\begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ wyniósł 3 lub wykaż, że nie ma takiej wartości a .
- Znajdź trzy różne wartości a , dla których macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & a \end{pmatrix}$ jest osobliwa.
- Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i niech $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
 a) Oblicz wyznacznik macierzy $X = A^{-1}B$.
 b) Oblicz wyznacznik macierzy $C = XBA$.
- Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^3$.
- Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $(1, 2), (3, -1), (5, 3)$.
- Oblicz objętość ostrosłupa o wierzchołkach $(1, 2, 1), (3, -1, 4), (2, 5, 3), (1, 1, 1)$.
- Dany jest układ równań $U : \begin{cases} -2x_1 + tx_2 = 1 \\ (-2-t)x_1 + 3tx_2 = t-1. \end{cases}$
 a) Znajdź te wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których U ma nieskończenie wiele rozwiązań.
 b) Znajdź te wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których U jest sprzeczny.

12. Oblicz wartość zmiennej y z układu równań:

$$\gamma) \begin{cases} 2y + z = 0, \\ x + 4y + z = 1, \\ 5x + 3y + 2z = 0. \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \\ 3x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

13. Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru p :

$$a) \begin{cases} x + py - 3z = 1, \\ x + 10y - z = p, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 4y - 2z = -p, \\ 3x + 5y - pz = 3, \\ px + 3py + z = p. \end{cases}$$

14. Sprawdź, czy wielomiany: a) $2x^3 + 3x^2 + 1, 3x^3 + 2x + 1, x^2 + 1, 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, b) $3x^3 - x^2 - x, 2x^2 - 3x - 1, 7x + 12, 4$ tworzą układ liniowo zależny w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ wielomianów stopni ≤ 3 zmiennej x .

15. Zbadaj, czy układ funkcji $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x$ przestrzeni $C(\mathbb{R})$ jest liniowo zależny.

16. Zbadaj, dla których wartości parametru a układ wektorów $(1, 1, a), (2, a, a), (-3, 0, 2)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny.

17. Zbadaj, dla których a układ macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ przestrzeni $M(2 \times 2)$ jest liniowo niezależny.

18. Dane są wektory v, w przestrzeni liniowej V . Wykaż, że tworzą one układ liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy są proporcjonalne, tzn. jeden powstaje z drugiego przez mnożenie przez skalar.

19. Dane są wektory $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Wykaż, że tworzą one układ liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy o wierszach $v_1, \dots, v_n$ jest różny od zera. Czy jest istotne, że liczba wektorów jest równa liczbie ich współrzędnych?

20. Wykaż, że kolumny macierzy kwadratowej tworzą układ liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy wiersze tej macierzy kwadratowej tworzą układ liniowo niezależny.

21. Znajdź bazę przestrzeni macierzy 2×2 symetrycznych i określ jej wymiar.

22. Znajdź bazę i określ wymiar przestrzeni wielomianów nieparzystych stopni ≤ 6 .

23. Znajdź bazę przestrzeni rozwiązań układu równań
$$\begin{cases} 2w - 3x + 4y - 5z = 0, \\ 3w - 5x + y - 2z = 0, \\ 3w - 4x + 11y - 13z = 0 \end{cases}$$
 oraz znajdź kolumnę współrzędnych rozwiązania $(2, 1, 1, 1)$ w tej bazie.

24. Znajdź wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań
$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 0, \\ 5x + 3y - 2z = 0, \\ -x - 11z = 0, \\ x + y - 8z = 0. \end{cases}$$

25. Znajdź bazę $W = \text{lin}((1, 1, 2, 0, -1), (0, 1, 0, 2, 0), (1, 0, 1, 1, -2), (0, 0, 3, -1, -3), (0, 2, 1, 1, 1))$.

26. Niech $V = \text{lin}((1, 0, 0, 2, -1, 2), (0, -1, 2, 1, 0, -1), (2, 1, -2, 3, -2, 5), (2, -1, 2, 5, -2, 3))$. Oblicz $\dim V$.