

## Kognitywistyka, zadania 9, równania

1. Rozwiąż układy równań:

$$a) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4, \\ 2x - y - z = 3. \end{cases}$$

$$b) -w + 4x - y + 6z = 9.$$

$$c) \begin{cases} w - 2x + y - 3z = 1, \\ x + 2y - z = 4, \\ -w + 4x + 3y + z = 5. \end{cases}$$

2. Znajdź taki wielomian  $f$  stopnia  $\leq 3$ , że  $f(1) = -2, f(2) = -4, f(3) = -2, f(4) = 10$ .

Wskazówka: wielomian stopnia  $\leq 3$  jest funkcją postaci  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

3. Czy istnieją takie liczby  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , że macierz  $\begin{pmatrix} 5a+2c & 2a-3b \\ a+b+2c & b+c \end{pmatrix}$  jest macierzą jednostkową? Jeśli tak, to znajdź wszystkie możliwe trójki takich liczb.

4. Funkcja  $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$  spełnia warunki  $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$ . Oblicz  $f(0)$ .

5. Zbadaj, czy wektor  $w$  jest kombinacją liniową wektorów  $w_1, \dots, w_k$ , jeśli:

$$a) w = (1, 1, 2), w_1 = (1, 3, 2), w_2 = (3, 1, 2), w_3 = (-1, 5, 2).$$

$$b) w = (-3, 4, 1, 2), w_1 = (1, 2, -1, 0), w_2 = (-2, 1, 3, -1), w_3 = (1, 2, 1, -2).$$

$$c) w = (2, 1, 0), w_1 = (1, 2, 4), w_2 = (-2, 1, 7), w_3 = (1, 3, 7), w_4 = (5, 2, 4).$$

Rozwiązanie. a) Należy sprawdzić, czy istnieją takie współczynniki  $a_1, a_2, a_3$ , że zachodzi równość  $w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3$ , tzn.  $(1, 1, 2) = a_1(1, 3, 2) + a_2(3, 1, 2) + a_3(-1, 5, 2)$ , tzn.  $(1, 1, 2) = a_1(1, 3, 2) + a_2(3, 1, 2) +$

$$a_3(-1, 5, 2), \text{ tzn. } (1, 1, 2) = (a_1, 3a_1, 2a_1) + (3a_2, a_2, 2a_2) + (-a_3, 5a_3, 2a_3) \text{ tzn. } \begin{cases} a_1 + 3a_2 - a_3 = 1, \\ 3a_1 + a_2 + 5a_3 = 1, \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 2. \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ wykonując przekształcenia elementarne na wierszach jego macierzy rozszerzonej:

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & -3w_1 + w_2 & & \\ 3 & 1 & 5 & 1 & & -2w_3 + w_2 & \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -2w_1 + w_3 & & \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & & & \\ 0 & -8 & 8 & -2 & & & \\ 0 & -4 & 4 & 0 & & & \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & & & \\ 0 & -4 & 4 & 0 & & & \end{array} \right).$$

Równanie odpowiadające drugiemu wierszowi nie ma rozwiązań, zatem nasz układ jest sprzeczny, a więc wektor  $w$  nie jest kombinacją liniową wektorów  $w_1, w_2, w_3$ .

6. Ciągi  $(w_1, w_2, \dots, w_n), (z_1, z_2, \dots, z_n)$  są rozwiązaniami jednorodnego układu równań liniowych, a liczba  $a$  jest rzeczywista. Wykaż, że ciągi  $(w_1 + z_1, w_2 + z_2, \dots, w_n + z_n), (aw_1, aw_2, \dots, aw_n)$  też są rozwiązaniami tego układu.

7. Zbadaj, czy układ wektorów  $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^n$  jest liniowo zależny, jeśli:

$$a) w_1 = (1, 1, 1, 2), w_2 = (2, -1, 1, 0), w_3 = (2, 1, 2, -1), w_4 = (3, 1, -2, 1).$$

$$b) w_1 = (1, 1, 1, 2), w_2 = (2, -1, 1, 0), w_3 = (2, 1, 2, -1), w_4 = (3, 1, 2, 7).$$

W każdym z tych przypadków zbadaj, czy każdy wektor przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  jest kombinacją liniową wektorów  $w_1, w_2, w_3, w_4$ .

8. Mówimy, że wektor  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  jest prostopadły do wektora  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sum_{j=1}^n a_j b_j = 0$ . Piszemy wtedy  $a \perp b$ .

a) Zbadaj, czy wśród wektorów  $(1, 2, 3), (5, 1, 6), (1, 1, -1)$  można znaleźć parę wektorów prostopadłych.

b) Znajdź wszystkie wektory  $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  prostopadłe do każdego z wektorów  $a = (1, 3, 5), b = (3, -1, 4)$ .

9. a) Znajdź przykład wektora  $u = (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  prostopadłego do każdego z wektorów  $a = (1, 3, -2, 0), b = (3, -1, 1, 4)$ .

b) Znajdź postać ogólną wektorów  $u = (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  prostopadłych do każdego z wektorów  $a = (1, 3, -2, 0), b = (3, -1, 1, 4)$ .

10. Rozwiąż następujące układy równań:

$$\alpha) \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 8z = 19, \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ x + y + z + t = 0 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3, \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1, \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1, \end{cases}$$

$$\varepsilon) \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 6z = 7, \end{cases}$$

$$\zeta) \begin{cases} x - 2y + 3z + 4s = -2 \\ 2x - 4y + z - s = 3, \end{cases}$$

$$\eta) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 4x + 5y = 1, \end{cases}$$

$$\vartheta) \begin{cases} x - 5y + 3z - s = 1 \\ 2x - 10y + 3s = 0 \\ 4x - 20y + 6z + s = 2. \end{cases}$$

Odpowiedzi:  $\alpha) x = 1, y = -1, z = 1;$

$\beta) x = -1 - t, y = 1, z = 0;$

$\gamma), \epsilon)$  brak rozwiązań;

$\delta) x = \frac{1}{7} + s - t - \frac{3}{7}z, y = \frac{1}{7} - s + \frac{4}{7}z;$

$\eta) x = -1, y = 1;$

$\zeta) x = \frac{11}{5} + 2y + \frac{7}{5}s, z = -\frac{7}{5} - \frac{9}{5}s;$

$\theta. x = 5y - \frac{3}{2}s, z = \frac{1}{3} + \frac{5}{6}s.$

11. Macierz kwadratowa  $A$  nazywa się symetryczna, jeśli  $A = A^T$ . Zbadaj, czy zbiór macierzy  $2 \times 2$  symetrycznych jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $M(2 \times 2)$ .
12. Sprawdź, czy jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{R}[x]_6$  wielomianów stopni  $\leq 6$ :
  - a) zbiór wszystkich wielomianów nieparzystych (stopni  $\leq 6$ ), tzn. wielomianów, w których zmienna  $x$  występuje jedynie w potęgach o nieparzystych wykładnikach.
  - b) zbiór wszystkich wielomianów stopnia 5.
  - c) zbiór wszystkich wielomianów stopni  $\leq 6$  podzielnych przez wielomian  $x^2 - x^3 + 7$ .
  - d) zbiór wszystkich wielomianów stopni  $\leq 6$  o współczynnikach całkowitych.
  - e) zbiór wszystkich wielomianów stopni  $\leq 6$  o współczynnikach dodatnich.
  - f) zbiór wszystkich wielomianów stopni  $\leq 6$  o współczynnikach nieujemnych.
  - g) zbiór wszystkich wielomianów stopni  $\leq 6$ , które w punkcie  $x_0 = 2$  przyjmują wartość 1.
  - h) zbiór wszystkich wielomianów stopni  $\leq 6$ , które w punkcie  $x_0 = 2$  przyjmują wartość 0.
13. Wykaż, że układ wektorów  $v_1, \dots, v_k$  przestrzeni liniowej  $V$  jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych.