

Kognitywistyka, zadania 8, macierze

1. Znajdź te wszystkie pary parametrów $x, y \in \mathbb{R}$, dla których macierze:

$$A = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+3y \\ -x-y & x+3y \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -x-4y & x \\ 1-x & 0 \end{pmatrix} \text{ są równe.}$$

2. Oblicz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^k$ dla $k \in \mathbb{N}$.

3. Oblicz AB , jeśli $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$.

4. Oblicz Av^T , jeśli $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ oraz: a) $v = [1, 0]$, b) $v = [0, 1]$, c) $v = [1, -1]$.

5. Zbadaj, które z równości są prawdziwe dla wszystkich macierzy $A, B \in M(n \times n)$:

a) $(A+B)^2 = (B+A)^2$,

b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

c) $(A+B)^2 = A(A+B) + B(A+B)$,

d) $(A+B)^2 = (A+B)(B+A)$,

e) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

6. Znajdź taki wektor (x, y) , że $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. a) Przedstaw macierz A^2 w postaci kombinacji liniowej macierzy A oraz I_2 , tzn. znajdź takie liczby $a, b \in \mathbb{R}$ że $A^2 = aA + bI_2$. b) Czy A^3 również jest kombinacją liniową A oraz I_2 ? c) A A^{100} ? d) Czy każda macierz $A^n, n \in \mathbb{N}$ jest symetryczna (macierz M jest symetryczna $\iff M^T = M$)? e) Czy każda macierz symetryczna $M \in M(2 \times 2)$ jest kombinacją liniową macierzy A oraz I_2 ?

8. Niech $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Wykonaj działania możliwe do wykonania: $A + 2B, A + 3C, AB, BA, CD, DC, D^2$.

9. Znajdź taką macierz X , że zachodzi równość:

a) $X + X^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. b) $X - X^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. c) $X - X^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

10. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Oblicz $AB^T, BA^T, A^T B, B^T A$.

11. Oblicz rząd macierzy A , jeśli:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 12 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Znajdź te wartości parametru a , dla których rząd macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 2 & a & -2 \\ 4 & 5 & -1 & 2a \\ 2 & 1 & 10 & -12 \end{pmatrix}$ jest równy 2.

13. Oblicz A^{-1} , jeśli: a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$,
d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

14. Podaj przykład macierzy $A, B \in M(2 \times 2)$ różnych od macierzy zerowej, spełniających równość $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. a) Wykonaj mnożenie $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

b) Zapisz funkcję $3x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 - 5x_3^2$ w postaci macierzowej.

16. Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i niech $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Znajdź macierz $X = A^{-1}B$.

b) Znajdź macierz $Y = B^{-1}A$.

17. Rozwiąż równanie macierzowe: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $X \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Znajdź taką macierz $A \in M(2 \times 2)$, że $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

19. Znajdź taką macierz $A \in M(3 \times 3)$, że $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

20. Rozwiąż metodą macierzową układ równań $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = \lambda \end{cases}$ w zależności od wartości parametru λ .