

Kognitywistyka, zadania 7, całki

1. Znajdź następujące całki nieoznaczone (np. metodą zgadywania):
- $$\begin{array}{llll} \alpha) \int 5x^4 - 3x^2 + 8x - 7dx, & \beta) \int 2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 1 dx, & \gamma) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx, & \delta) \int \frac{3x^3 - 4x^2 + 5x - 6}{x^2} dx, & \epsilon) \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx, \\ \zeta) \int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx, & \eta) \int 3e^x - 2\sin x + 5\cos x dx, & \vartheta) \int \cos 3x dx, & \iota) \int (x+1)^{15} dx, \\ \kappa) \int \frac{1}{(2x-3)^5} dx, & \lambda) \int \sqrt{8-2x} dx, & \mu) \int 2x\sqrt{x^2+1} dx, & \nu) \int \frac{x dx}{x^2+1} & \xi) \int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}, \\ o) \int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx, & \pi) \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}, & \varrho) \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, & \sigma) \int \sin^3 x \cos x dx, & \tau) \int x \cos x dx, \\ \upsilon) \int \frac{4x-1}{x^2+9} dx, & \phi) \int \frac{x}{x+4} dx, & \chi) \int \frac{x+2}{2x-1} dx, & \psi) \int \frac{dx}{x(x-1)}, & \omega) \int \frac{dx}{4x^2-9}. \end{array}$$

Rozwiązanie.

$\iota)$ Zamiast rozwijać potęgę ze wzoru dwumianowego i całkować uzyskany wielomian, próbuję, co bym uzyskał różniczkując funkcję $(x+1)^{16}$. Widzę, że dostałbym

$16(x+1)^{15}$, a więc 16 razy za dużo. Wynika z tego, że $\int (x+1)^{15} dx = \frac{1}{16}(x+1)^{16} + C$.

$\nu)$ Zauważam, że funkcja x w liczniku jest połową pochodnej funkcji $x^2 + 1$ z mianownika. Stąd pomysł, że funkcja podcałkowa powstała ze zróżniczkowania funkcji złożonej z funkcją wewnętrzną $x^2 + 1$. Zapisuję funkcję podcałkową $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)' \cdot \frac{1}{x^2+1}$ i zgaduję, że funkcją zewnętrzną jest logarytm naturalny. Sprawdzam: $[\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1)]' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}$ jest funkcją podcałkową, zatem stwierdzam, że $\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$.

$\upsilon)$ Zauważam, że mogę zapisać funkcję podcałkową w postać różnicy $\frac{4x-1}{x^2+9} = 2 \cdot \frac{2x}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+9}$. Pierwszy składnik jest pochodną funkcji $2 \ln(x^2 + 9)$. Drugi składnik przypomina pochodną funkcji $\arctg$, ale różni się od niej liczbą 9 w mianowniku. Aby mieć w tym miejscu 1, zapisuję ten składnik w postaci $\frac{1}{x^2+9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}$. Obliczam pochodną funkcji $\arctg(\frac{x}{3})$: $(\arctg(\frac{x}{3}))' = \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{x^2+9}$ i widzę, że otrzymałem 3 razy za dużo. Zatem stwierdzam, że $\int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{1}{3} \arctg(\frac{x}{3}) + C$. Zatem $\int \frac{4x-1}{x^2+9} dx = 2 \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \arctg(\frac{x}{3}) + C$. Wykonuję sprawdzenie, aby się przekonać, czy nie popełniłem jakiegoś błędu: $(2 \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \arctg(\frac{x}{3}))' = 2 \cdot \frac{1}{x^2+9} \cdot 2x - \frac{1}{3} \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4x}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+9}$, zgadza się.

2. Oblicz przez podstawienie następujące całki nieoznaczone:
- $$\begin{array}{llll} \alpha) \int \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}} dx, & \beta) \int \tg x dx, & \gamma) \int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx, & \delta) \int e^{2x^2+2x-1}(2x+1) dx, \\ \epsilon) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, & \zeta) \int \frac{e^x}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx, & \eta) \int \frac{\ln x}{x} dx, & \vartheta) \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx, \\ \iota) \int \frac{\cos \ln x}{x} dx. \end{array}$$

Rozwiązanie $\gamma)$ Zauważam, że pochodna funkcji podpierwiastkowej jest równa $2x - 4$, czyli jest proporcjonalna do funkcji w liczniku. Zapisuję więc daną całkę $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$. Przyjmuję $g(x) = x^2 - 4x + 5$, wtedy $g'(x) = 2x - 4$, $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie dostaję $\frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy$, gdzie $y = x^2 - 4x + 5$. Obliczam całkę $\frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{y} + C$, a następnie wstawiam $y = g(x) = x^2 - 4x + 5$. Otrzymuję odpowiedź $3\sqrt{x^2 - 4x + 5} + C$. Sprawdzenie zostawiam jako ćwiczenie.

3. Oblicz przez części następujące całki nieoznaczone:
- $$\begin{array}{llll} \alpha) \int x \sin x dx, & \beta) \int x^2 e^{-x} dx, & \gamma) \int x \tg^2 x dx, & \delta) \int \ln x dx, \\ \epsilon) \int x^3 \sin x dx, & \zeta) \int e^x \sin x dx, & \eta) \int \ln(x^2 + 1) dx, & \vartheta) \int \ln^2 x dx, \\ \iota) \int \sin \ln x dx. \end{array}$$

Rozwiązanie $\beta)$ $\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2 (-e^{-x})' dx = x^2 (-e^{-x}) - \int (x^2)' (-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x (-e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} + 2x (-e^{-x}) - \int (2x)' (-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$. Sprawdzenie: $(-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x})' = -2x e^{-x} + x^2 e^{-x} - 2e^{-x} + 2x e^{-x} + 2e^{-x} = x^2 e^{-x}$, zgadza się.

4. Oblicz następujące całki oznaczone:
- $$\begin{array}{llll} \alpha) \int_{-2}^2 x^{16} + x^9 dx, & \beta) \int_{16}^{81} \sqrt[4]{x} dx, & \gamma) \int_{-1}^1 e^{-4x} dx, & \delta) \int_1^5 \frac{1}{x^2(x+1)} dx, \\ \epsilon) \int_0^{\pi/2} x \sin 5x dx, & \zeta) \int_0^1 \frac{x^3+3}{x^2+1} dx, \end{array}$$

Rozwiązanie. $\alpha)$ $\int_{-2}^2 x^{16} + x^9 dx = \frac{1}{17} x^{17} + \frac{1}{10} x^{10} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{17} 2^{17} + \frac{1}{10} 2^{10} - \frac{1}{17} (-2)^{17} - \frac{1}{10} (-2)^{10} = \frac{2^{18}}{17}$.

5. Oblicz pole obszaru zawartego między krzywymi: $\eta) y = x^3, x = y^2, \quad \vartheta) x = 1 - y^2, x + y = -1,$
 $\iota) y = \cos \frac{\pi x}{2}, y = (x - 1)^2, \quad \kappa) y = \sqrt{x}, y = \sqrt{x + 1}, 0 \leq x \leq 4,$
 $\lambda) y = \sin x, y = \sin x \cos x, 0 \leq x \leq \pi, \quad \mu) x = y^2 + 4y + 1, x = 6y + 9.$

Rozwiązanie. $\vartheta)$ Zaczynamy od znalezienia punktów wspólnych krzywych. Punkt (x, y) leży na obu krzywych wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 1 - y^2, x = -y - 1 \iff x = -y - 1, y^2 - y - 2 = 0 \iff (x, y) = (1, 0)$ lub $(x, y) = (2, -3)$. Pierwsza krzywa jest wykresem funkcji $f(y) = 1 - y^2$, a druga wykresem funkcji $g(y) = -y - 1$. Współrzędna y przyjmuje w tych punktach wartości -1 i 2 . Dla $y \in (-1, 2)$ zachodzi nierówność $f(y) > g(y)$, zatem f jest naszą górną funkcją, a g – dolną. Zatem pole obszaru zawartego między tymi krzywymi jest równe $P = \int_{-1}^2 1 - y^2 - (-y - 1) dy = \int_{-1}^2 -y^2 + y + 2 dy = -\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y \Big|_{-1}^2 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$.

6. a) Wykaż następujące twierdzenie o wartości średniej. Jeśli funkcja f jest ciągła, to istnieje taka liczba $c \in (a, b)$, że $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$. b) Wykaż, że $\frac{\pi}{2} < \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx < \pi$.

7. Oblicz pole pod n -tą górką wykresu funkcji $g(x) = x \sin x$ dla $x > 0$.

8. Na paraboli $y = 6 - x^2$ zaznaczono punkty o odciętych -2 oraz 1 i połączono je odcinkami z początkiem układu. Oblicz pole powstałej figury.

Rozwiązanie. Te punkty mają współrzędne $(-2, 2)$ i $(1, 5)$. Proste łączące te punkty z początkiem układu współrzędnych mają równania $y = -x$ oraz $y = 5x$. Powstał trójkąt krzywoliniowy z dwoma bokami na znalezionych prostych i jednym na paraboli. Górną funkcją jest funkcja kwadratowa $g(x) = 6 - x^2$. Na przedziale $[-2, 0]$ dolną funkcją jest $d_1(x) = -x$, a na przedziale $[0, 1]$ dolną funkcją jest funkcja liniowa $5x$. Zatem pole jest równe $\int_{-2}^0 6 - x^2 - (-x) dx + \int_0^1 6 - x^2 - 5x dx = (6x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}) \Big|_{-2}^0 + (6x - \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}) \Big|_0^1 = \frac{22}{3} + \frac{19}{6} = \frac{21}{2}$.

9. Oblicz pole obszaru ograniczonego od góry wykresami funkcji e^x oraz $\frac{e}{x}$ a od dołu prostą $y = 1$.

10. Oblicz pole obszaru ograniczonego z góry osią odciętych, a z dołu wykresem funkcji $f(x) = xe^x$.

11. Oblicz: a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, b) $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx$, c) $\int_0^1 x \ln x dx$.

Rozwiązanie a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}$.

12. Wyprowadź wzór na objętość stożka.

13. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu obszaru pod wykresem funkcji $\cos x$ na przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

14. Punkt A oddala się (wzdłuż prostej) od punktu B z prędkością zależącą od czasu według wzoru: a) $v(t) = \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$, b) $v(t) = \frac{1}{e^{2t}}$. Czy A oddali się dowolnie daleko (po odpowiednio długim czasie)?

Rozwiązanie. a) Oznaczmy drogę przebytą od chwili 0 do chwili t przez $x(t)$. Wtedy $x'(t) = \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$, zatem $x(t) = \ln \ln(t+2) + C$. Widzimy, że $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$, zatem tak, punkt A oddali się dowolnie daleko od B .

15. Zbadaj zbieżność szeregu: a) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^2 n}$, b) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$.