

Kognitywistyka, zadania 6, pochodna 3

1. Niech $A = (0, 0)$, $D = (0, 6)$. Prosta równoległa do osi rzędnych przecina wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 6$ w punkcie C leżącym w pierwszej ćwiartce i oś odciętych w punkcie B . Wskaż punkt C , dla którego pole trapezu $ABCD$ jest największe.
2. Producent może sprzedać $\sqrt{100 - x}$ ton towaru, jeśli jego cena wynosi x dolarów za tonę. Koszt wyprodukowania jednej tony wynosi 10 dolarów. Przy jakiej cenie za tonę producent osiągnie największy zysk?

Rozwiązanie. Wyrazimy zysk jako funkcję zmiennej x i zbadamy, dla której wartości x przyjmie ona swoją wartość największą. Zysk, to przychód minus koszt produkcji. Przy cenie x dolarów za tonę, producent sprzeda $\sqrt{100 - x}$ ton, więc koszty wyniosą $10\sqrt{100 - x}$ dolarów, a przychód ze sprzedaży $x\sqrt{100 - x}$ dolarów. Zatem zysk wyniesie $Z(x) = x\sqrt{100 - x} - 10\sqrt{100 - x} = (x - 10)\sqrt{100 - x}$ dolarów. należy więc znaleźć wartość x , przy której funkcja $Z(x)$ osiąga wartość największą. Dziedziną funkcji Z jest przedział $(0, 100)$. Obliczamy pochodną: $Z'(x) = \sqrt{100 - x} - \frac{(x-10)}{2\sqrt{100-x}}$. Rozwiązujemy nierówność $Z'(x) > 0 \iff \sqrt{100 - x} > \frac{(x-10)}{2\sqrt{100-x}} \iff 200 - 2x > x - 10 \iff x < 70$. Widzimy także, że $Z'(x) < 0$ dla $x > 70$. Zatem funkcja Z osiąga największą wartość dla $x = 70$ (tzn. przy cenie 70 dolarów za tonę).

3. Statek stoi na kotwicy w odległości 9 km od (prostoliniowego) brzegu, akurat naprzeciw skały. Marynarz ma w jak najkrótszym czasie dotrzeć do miejsca na brzegu, odległego od skały o 15 kilometrów. Prędkość marszu marynarza na lądzie jest równa 5 km/godz, a prędkość łódki, którą dopłynie do brzegu – 4 km/godz. W jakiej odległości od skały powinna dobić łódka.

4. Korzystając z reguły de l'Hospitala, oblicz granice: $\kappa) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2}$, $\lambda) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\lg 4x}$, $\mu) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - x}{x^2}$, $\nu) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$, $\xi) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x^2-4)}$, $\omicron) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2}$, $\pi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{2x}$, $\varrho) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sin(x-2)}$, $\sigma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x^2 - 2}$, $\tau) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \frac{\pi}{2}) \lg x$, $\upsilon) \lim_{x \rightarrow 0+} x^x$, $\varphi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x^2}$, $\chi) \lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^{\sqrt{x}}$, $\psi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $\omega) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$.

Rozwiązanie. $\nu) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \Big|_{+\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \Big|_{+\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$.

5. Oblicz granicę: a) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$.

a) Rozwiązanie. Łatwo obliczyć tę granicę: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = 1$. Zauważmy jednak, że zastosowanie reguły de l'Hospitala nie prowadzi do rozwiązania zadania, bo granica ilorazu pochodnych jest równie skomplikowana, co dana granica $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{\sin x})'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} \cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

6. Znajdź przedziały wklęsłości i przedziały wypukłości funkcji: $\eta) f(x) = \sin x$, $\vartheta) f(x) = x^2 \ln x$, $\iota) f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, $\kappa) f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

Rozwiązanie. ϑ) Obliczamy $f'(x) = 2x \ln x + x$, $f''(x) = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3$. Rozwiązujemy nierówność $f''(x) > 0 \iff 2 \ln x + 3 > 0 \iff \ln x > -\frac{3}{2} \iff x > e^{-3/2}$. Widzimy też, że $f''(x) < 0 \iff 0 < x < e^{-3/2}$. Zatem funkcja jest wklęsła na przedziale $(0, e^{-3/2})$ i wypukła na przedziale $(e^{-3/2}, +\infty)$.

7. Znajdź punkty przegięcia wykresu funkcji:
 - λ) $f(x) = 4x - \frac{x^2}{3}$, μ) $f(x) = 2x^2 + \ln x$, ν) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.
8. Zbadaj funkcję i naskicuj jej wykres:
 - a) $f(x) = x^3 + x^2$. b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. c) $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$.
 - d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$. e) $f(x) = e^x - e^{-x}$. f) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$.
 - g) $f(x) = x^2 \ln x$. h) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$. i) $f(x) = e^{-x^2}$.
 - j) $f(x) = \frac{x-1}{x^4}$. k) $f(x) = xe^{-1/x}$. l) $f(x) = \ln(4 - x^2)$.
9. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ jest zadana wzorem $f(x) = (x^2 + 1)e^x$. a) Wykaż, że funkcja f jest bijekcją (tzn. jest różnowartościowa i przekształca $\mathbb{R}$ na zbiór $(0, +\infty)$). b) Wyznacz pochodną funkcji odwrotnej do funkcji f w punkcie 1.
10. Niech $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ dla $x \neq -1$. Wykaż, że $f(x) \leq -4$, gdy $x < -1$.
 Rozwiązanie. $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Załóżmy, że $x < -1$. Wtedy $f'(x) > 0 \iff x^2 + 2x > 0 \iff x(x+2) > 0 \iff x < -2$. Zatem f rośnie na przedziale $(-\infty, -2]$. Podobnie stwierdzamy, że f maleje na $[-2, -1)$. Zatem funkcja f swoją wartość największą na przedziale $(-\infty, -1)$ przyjmuje w punkcie -2 . Ponieważ $f(-2) = -4$, to dla wszystkich $x < -1$ zachodzi nierówność $f(x) \leq -4$.
11. Niech $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ dla $x > 0$. a) Znajdź przedziały monotoniczności funkcji f . b) Wykaż nierówność $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$.
12. Niech $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ dla $x \geq 0$. a) Znajdź granicę $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. b) Wykaż, że $\frac{1}{2} \leq f(x) < 2$ dla wszystkich $x \in [0, +\infty)$.
13. Niech $f(x) = x - 2 \ln x$ dla $x > 0$. Wykaż, że $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$ dla wszystkich $x > 0$.
14. Wykaż nierówność $x^e \leq e^x$ dla wszystkich $x > 0$. Wsk. Skorzystaj z funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
15. Wykaż, że suma dwóch funkcji wypukłych na przedziale I jest funkcją wypukłą na przedziale I .
16. Niech $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że $\frac{2}{3} \leq f(x) + f(x^2) \leq 4$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
17. Podaj przykład takiej funkcji: a) wklęsłej, b) ściśle wklęsłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.