

Kognitywistyka, zadania 5, pochodna 2

1. Z kwadratowego kawałka blachy o wymiarach $24 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$ zamierzamy usunąć kwadraty o boku $x \text{ cm}$ w rogach, a następnie złożyć z niego prostopadłościenne pudełko (bez pokrywki). Dobierz tak wartość x , żeby pudełko miało największą pojemność.
2. Balon unosi się pionowo do góry. Obserwator patrzy na balon z punktu na ziemi położonego w odległości 1000 m od startu balonu. Gdy patrzy na balon pod kątem 20° , widzi, że kąt pod którym patrzy zmienia się z prędkością $3^\circ/\text{min}$. Z jaką prędkością porusza się wtedy balon?
Rozwiązanie. Niech $h(t)$ oznacza wysokość balonu w metrach, a $\alpha(t)$ kąt jego obserwacji w stopniach. Miara łukowa kąta obserwacji jest równa $\simeq \frac{\alpha}{57}$, bo jeden radian ma około 57° . Wtedy $\text{tg}(\frac{\alpha(t)}{57}) = \frac{h(t)}{1000}$, zatem $\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha(t)}{57}} \cdot \frac{1}{57} \alpha'(t) = \frac{h'(t)}{1000}$, zatem: $h'(t) = \frac{3 \cdot 1000}{57 \cos^2 20/57} \simeq 60 (\text{m/min})$.
3. Dwa wysokie budynki o pionowych ścianach stoją w odległości 10 metrów naprzeciwko siebie. Między budynkami na wysokości 10 metrów nad ziemią rozpięto nitkę o końcach w punktach A na I budynku i B na II budynku. Od A do B porusza się po nitce mucha z prędkością jednego metra na minutę. U podnóża ściany II budynku dokładnie pod punktem B świeci żarówka. Oblicz prędkość poruszania się cienia muchy na ścianie I budynku w chwili, gdy mucha jest w połowie drogi z A do B .
4. Dnia 21 marca rano na placu w Quito stał człowiek mający 1.6 metra wzrostu. Oblicz prędkość, z jaką poruszał się koniec jego cienia w momencie, gdy słońce było 6° nad horyzontem. Przyjmij, że $\pi \simeq 3$ oraz $\sin 6^\circ \simeq 0.1$.
5. Znajdź równanie prostej stycznej do wykresu danej funkcji w punkcie o danej odciętej. Następnie znajdź punkt przecięcia tej stycznej z osiami układu współrzędnych.
a) $f(x) = 4 - x^2, x = -1$,
b) $g(x) = 2\sqrt{x}, x = 1$, c) $h(x) = x^{-3}, x = -2$, d) $i(x) = \sin x, x = 0$, e) $j(x) = \frac{x+2}{x^2-1}, x = 2$.
6. Oblicz, o ile i w którą stronę zmieni się w przybliżeniu wartość funkcji $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{3} + \frac{4}{\sqrt{x}}$, gdy x wzrośnie:
a) od 4 do 4.5 , b) od 9 do 9.5 , c) od 1 do 1.5 .
7. Oblicz wartość przybliżoną: a) $\sqrt{26}$. b) $16.5^{1/4} - 16^{1/4}$. c) $\sqrt[3]{26.7}$. d) $31^{3/5}$. e) $1.01 \ln 1.01$.
c) Rozwiązanie. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$. W pobliżu liczby 26.7 leży liczba 27 , w której znamy wartość funkcji f , mianowicie $f(27) = 3$. Przyjmijmy więc $x_0 = 27$. Wtedy $h = 26.7 - 27 = -0.3$. $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, więc $f'(27) = \frac{1}{27}$. Zatem $f(26.7) \simeq f(27) + f'(27) \cdot (-0.3) = 3 - \frac{1}{27} \cdot 0.3 = 3 - \frac{1}{90}$.
8. Pod jakim kątem przecina oś odciętych: a) sinusoida w punkcie $(0, 0)$, b) parabola $y = x^2 - 1$ w punkcie $(1, 0)$?
9. Kąt przecięcia krzywych w punkcie A określamy jako kąt, pod którym przecinają się styczne do tych krzywych w punkcie A . Pod jakim kątem przecinają się krzywe: a) $x = y^2$ i $y = x^2$; b) $y = x^3 - x$ oraz $y = x$?
10. Znajdź wartość największą i wartość najmniejszą funkcji f na przedziale I oraz argumenty, w których te wartości są przyjęte.
v) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x, I = [0, 2]$, $\varphi) f(x) = \frac{x^2}{|x^3|+1}, I = [-\frac{1}{2}, 2]$,
 $\chi) f(x) = \sin x + \cos x, I = [0, 2\pi]$, $\psi) f(x) = x \ln^3 x, I = [e^{-4}, e]$, $\omega) f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2|x|, I = [-\frac{1}{2}, 1]$.
 $\omega)$ Rozwiązanie. Funkcja F jest ciągła na I , ale nie jest różniczkowalna nie tylko na końcach, ale także w punkcie 0 . Spełnia natomiast warunki Wniosku z punktu 10 wykładu na każdym z przedziałów $I_1 = [-\frac{1}{2}, 0]$ oraz $I_2 = [0, 1]$. Zatem obliczymy wartości funkcji f w punktach $x_0 = -\frac{1}{2}, x_1 = 0, x_2 = 1$ oraz w punktach zerowania pochodnej. Ze względu na występującą wartość bezwzględną, pochodną obliczymy oddzielnie wewnątrz I_1 i wewnątrz I_2 . Dla $x < 0$, $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x$, więc $f'(x) = 3x^2 - 5x - 2$. Zatem $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{3} \vee x = 2$, jednak druga z tych liczb nie należy do wnętrza przedziału I_1 . Zatem w I_1 mamy jeden punkt zerowania pochodnej $x_3 = -\frac{1}{3}$. Dla $x > 0$, $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$, więc $f'(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Zatem $f'(x) = 0 \iff x = 1 \vee x = \frac{2}{3}$, tylko $\frac{2}{3}$ należy do wnętrza przedziału I_2 . Zatem w I_2 mamy także jeden punkt zerowania pochodnej $x_4 = \frac{2}{3}$. Teraz obliczamy i porównujemy wartości funkcji f w punktach x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 . $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, f(-\frac{1}{3}) = \frac{19}{54}, f(0) = 0, f(\frac{2}{3}) = \frac{14}{27}, f(1) = \frac{1}{2}$. Porównując otrzymujemy $f(0) = 0 < f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} < f(-\frac{1}{3}) = \frac{19}{54} < f(1) = \frac{1}{2} < f(\frac{2}{3}) = \frac{14}{27}$. Zatem $f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\max} = f(\frac{2}{3}) = \frac{14}{27}$.

11. Znajdź ekstrema lokalne funkcji: $\alpha) f(x) = |x^2 - 4|$, $\beta) f(x) = x^2 - 8 \ln x$, $\gamma) f(x) = \frac{x^3}{|x|+1}$, $\delta) f(x) = x^5 \ln x$, $\varepsilon) f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $\zeta) f(x) = \frac{1}{x^3-3x}$.

$\alpha)$ Rozwiązanie. Funkcja f jest różniczkowalna wszędzie poza punktami $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 2$. W każdym z tych punktów funkcja f ma minimum lokalne, przyjmuje tam wartość zero, a wszędzie obok wartości dodatnie. Pozostałe ekstrema lokalne może przyjąć jedynie w punktach zerowania pochodnej. Obliczamy więc pochodną funkcji f . Jeśli $-2 < x < 2$, to $f(x) = 4 - x^2$ oraz $f'(x) = -2x$ i $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Sprawdźmy, czy w tym punkcie spełniony jest warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego, tzn. czy pochodna zmienia w nim znak. Gdy $-2 < x < 0$, to $f'(x) > 0$. Gdy $0 < x < 2$, to $f'(x) < 0$. Widzimy więc, że $f'(x)$ zmienia swój znak w punkcie $x = 0$ z dodatniego na ujemny. Zatem funkcja f ma w punkcie 0 maksimum lokalne. Jeśli $x < -2$ lub $x > 2$, to $f(x) = x^2 - 4$ oraz $f'(x) = 2x$ i $f'(x) \neq 0$. Zatem funkcja f ma ma innych ekstremów lokalnych.

12. Znajdź przedziały monotoniczności funkcji: $\alpha) f(x) = x^3 + 6x^2$, $\beta) f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x$, $\gamma) f(x) = \frac{2-x}{x+1}$,
 $\delta) f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $\varepsilon) f(x) = x\sqrt{\frac{2+x}{x}}$, $\zeta) f(x) = x^3 \ln x$, $\eta) f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$, $\vartheta) f(x) = x \ln(-x)$.

$\zeta)$ Rozwiązanie. Dziedziną funkcji f jest przedział $(0, +\infty)$. Obliczamy pochodną: $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$. Rozwiązujemy nierówność $f'(x) > 0 \iff 3x^2 \ln x + x^2 > 0 \iff x^2(3 \ln x + 1) > 0 \iff \ln x > -\frac{1}{3} \iff x > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$. Zatem f jest rosnąca na przedziale $(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, +\infty)$, a malejąca na przedziale $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{e}})$. Można nietrudno wykazać, że f jest rosnąca na przedziale $[\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, +\infty)$, a malejąca na przedziale $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}]$.

13. Wykaż, że funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = (2^x + 1)^{1/x}$ jest monotoniczna.

14. Niech $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ dla $x > 0$. Wykaż, że $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$ dla $x \geq \sqrt{e}$.