

Kognitywistyka, zadania 4, ciągłość, pochodna 1

1. Zbadaj, czy jest ciągła funkcja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{dla } x < 0, \\ e^x & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$
2. Wyznacz wartości parametrów rzeczywistych m i k tak, aby następująca funkcja f była funkcją ciągłą:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{m}{x-2} & \text{dla } x < 2, \\ kx - 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x} & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], x \neq 0, x \neq \pi \\ m & \text{dla } x = 0, \\ k & \text{dla } x = \pi. \end{cases}$$

Rozwiązanie. b) $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Ponieważ $\sin x$ zeruje się jedynie w punktach $x_1 = 0$ oraz $x_2 = \pi$ dziedziny D_f , to z Twierdzenia 4 wynika, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie dziedziny oprócz punktów x_1 i x_2 . Pozostaje tak dobrać wartości parametrów m, k , żeby była ciągła w punktach x_1 oraz x_2 . Ciągłość w punkcie $x_1 = 0$ oznacza, że $m = f(x_1) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Obliczamy więc granicę

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 1$ (ważne granice). Zatem ciągłość w punkcie x_1 zapewni nam warunek $m = 1$. Zajmijmy się teraz punktem $x_2 = \pi$. Granica $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2}$ zatem należy przyjąć $k = \frac{\pi}{2}$, aby funkcja była ciągła w punkcie π . Odp. Funkcja f jest ciągła $\iff m = 1, k = \frac{\pi}{2}$.

3. Funkcja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{gdy } x \in [0, 1], \\ a \frac{\sin(x-1)}{x^2-5x+4}, & \text{gdy } x \in (1, \pi]. \end{cases}$ Znajdź te wartości parametru a , przy których funkcja f jest ciągła.

4. Wykaż, że

- a) dowolny wielomian unormowany stopnia parzystego przyjmuje swoją wartość najmniejszą;
- β) dowolny wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty;
- γ) wielomian $x^3 - 3x + 1$ ma dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste;
- δ) zbiór wartości funkcji $3x^4 - 5x^3 + x - 7$ zawiera przedział $[-8, 8]$;
- ϵ) funkcja określona wzorem $x^6 - 2x^4 - x^2 + 1$ dla $x \in (-1, 1)$ osiąga swoją największą wartość.

Rozwiązanie. β) Rozpatrzmy wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą nieparzystą i założmy, że $a_n > 0$. Wtedy $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}) = +\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}) = -\infty$, bo $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ gdy n jest liczbą nieparzystą. Z definicji granicy równej $+\infty$ wynika, że istnieje taki punkt $x_1 \in \mathbb{R}$, że $w(x_1) > 0$. Podobnie, istnieje taki punkt $x_2 \in \mathbb{R}$, że $w(x_2) < 0$. Wielomian w jest funkcją ciągłą (Twierdzenie 3), więc ma własność Darboux (Twierdzenie 8). Zatem pomiędzy liczbami x_1, x_2 istnieje pierwiastek (czyli miejsce zerowe) wielomianu w . Gdy współczynnik a_n jest ujemny, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = +\infty$, a dowód jest analogiczny.

γ) Niech $u(x) = x^3 - 3x + 1$. Zaczynamy od obliczenia wartości wielomianu u w kilku punktach: $u(0) = 1, u(1) = -1, u(2) = 3, u(-1) = 3, u(-2) = -1$. Wielomian u ma własność Darboux, więc ma wartość 0 w pewnym punkcie $x_1 \in (-2, -1)$, a także w pewnym punkcie $x_2 \in (0, 1)$ oraz w pewnym punkcie $x_3 \in (1, 2)$. Ma więc co najmniej trzy miejsca zerowe. Więcej mieć nie może, bo niezerowy wielomian nie może mieć więcej miejsc zerowych, niż wynosi jego stopień.

ϵ) Niech $v(x) = x^6 - 2x^4 - x^2 + 1$. Funkcja v jest ciągła, ale nie możemy skorzystać bezpośrednio z twierdzenia Weierstrassa (Twierdzenie 6), bo przedział $(-1, 1)$ nie jest domknięty. Rozpatrzmy nową funkcję $V(x) = x^6 - 2x^4 - x^2 + 1$ określoną tym samym wzorem co $v(x)$, ale dla $x \in [-1, 1]$. Na mocy twierdzenia Weierstrassa funkcja $V(x)$ przyjmuje swoją wartość największą w pewnym punkcie $x_0 \in [-1, 1]$. Zauważmy, że $V(-1) = V(1) = -1, V(0) = 1$. Ponieważ $1 > -1$, to wartość -1 przyjęta na krańcach przedziału $[-1, 1]$ nie jest wartością największą funkcji V . Zatem $x_0 \neq 1, x_0 \neq -1$. Z tego wynika, że w tym samym punkcie x_0 przyjmuje swoją największą wartość funkcja $v(x)$.

5. Ile miejsc zerowych ma wielomian $x^3 + 3x - 7$?

6. Ile miejsc zerowych ma wielomian $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 12x + 1$?

7. Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe w przedziale I , jeśli:

$$\zeta) f(x) = (x-1)e^x + x, I = [0, 1],$$

$$\eta) f(x) = 2\sin 2x - 3\cos x, I = [0, \pi],$$

$$\vartheta) f(x) = x + \ln x, I = (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\iota) f(x) = x^{2x} - 1, I = (0, 1).$$

Rozwiązanie.

$\zeta)$ funkcja f jest ciągła na przedziale I , a na krańcach przyjmuje wartości $f(0) = -1, f(1) = 1$. Są one różnych znaków, więc w pewnym punkcie $x_0 \in (0, 1)$ funkcja f ma wartość 0.

$\vartheta)$ Funkcja f jest ciągła oraz $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} - 1 < 0, f(1) = 1 > 0$. Zatem w pewnym punkcie leżącym między liczbami $\frac{1}{e}$ a 1 funkcja f ma wartość 0. Punkt x_0 oczywiście leży w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, bo $0 < \frac{1}{e} < x_0 < 1 < \frac{\pi}{2}$.

8. Oblicz z definicji pochodną funkcji: $f(x) = x^2 - x$ w punkcie $x_0 = 1$. b) $g(x) = \frac{1}{x+3}, x_0 = -1$.

Rozwiązanie. a) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - (1+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 1) = 1$.

9. Oblicz pochodne funkcji w dowolnym punkcie:

$$a(x) = 2x^2 + 8x + 1, \quad b(x) = 15x^7 - 11x^3 + 24x + 411, \quad c(x) = \pi x^3 - ex^2 - x \ln e + \sqrt{2},$$

$$d(x) = 25x^4 + 4\sqrt{x} - 4, \quad e(x) = \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{5},$$

$$g(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + 3, \quad h(x) = 2x^3 + 8\sin x + 11\ln x, \quad i(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x - 9},$$

$$j(x) = (3x - 1)(-x^2 + 2x + 5), \quad k(x) = 3\cos x - \frac{5}{\sin x} + \frac{7}{e^x}, \quad l(x) = (3x + 4)^7,$$

$$m(x) = x \ln x, \quad n(x) = \frac{e^x}{x^2}, \quad p(x) = \sqrt{7x + 4}, \quad q(x) = \sqrt{e^x + x^2 + 1}$$

$$r(x) = x \sin x + \cos x, \quad s(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad t(x) = 5xe^x \operatorname{tg} x, \quad u(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x},$$

$$v(x) = x^2 \ln x + 3x, \quad w(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}, \quad y(x) = \ln(x^4 - x), \quad z(x) = \sin 2x + xe^{x^2 + x}.$$

Rozwiązanie. Podaję bardzo szczegółowe wyjaśnienia. Wiele spośród podanych kroków należy wykonywać w pamięci.

$g'(x) = (\frac{3}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + 3)' = (3x^{-1/2} - 4x^{1/2} + 3)' = 3(x^{-1/2})' - 4(x^{1/2})' + 3' = 3 \cdot (-\frac{1}{2})x^{-3/2} - 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 0 = -\frac{3}{2\sqrt{x^3}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ (pochodna sumy (różnicy), to suma (różnica) pochodnych, pochodna funkcji pomnożonej przez stałą, to stała razy pochodna funkcji).

$m'(x) = (x \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ (pochodna iloczynu, to pochodna pierwszego czynnika razy drugi czynnik plus pierwszy czynnik razy pochodna drugiego czynnika).

$n'(x) = (\frac{e^x}{x^2})' = \frac{(e^x)' \cdot x^2 - e^x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{e^x x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$ (pochodna ilorazu, to iloraz: w liczniku pochodna licznika razy mianownik minus licznik razy pochodna mianownika, w mianowniku kwadrat mianownika).

$q(x) = \sqrt{e^x + x^2 + 1}$. Jest to funkcja złożona, funkcją wewnętrzną jest $f(x) = e^x + x^2 + 1$, a funkcją zewnętrzną $g(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Ich pochodne są równe $f'(x) = e^x + 2x, g'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Zatem z twierdzenia 22 wynika, że $q'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x + x^2 + 1}} \cdot (e^x + 2x)$ (pochodna funkcji złożonej, to pochodna funkcji zewnętrznej ze wstawioną funkcją wewnętrzną razy pochodna funkcji wewnętrznej).

10. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x , jeśli

$$\alpha) f(x) = 5x^{2/3} - 3x^{5/2} + 2x^{-3}, \quad x = 1,$$

$$\beta) f(x) = (1 - \sqrt{x})^2/x, \quad x = 0,01,$$

$$\gamma) f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}, \quad x = 2,$$

$$\delta) f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, \quad x = -\frac{\pi}{4},$$

$$\epsilon) f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{16}{x}, \quad x = -8,$$

$$\zeta) f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}}, \quad x = 1,$$

$$\eta) f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}, \quad x = \frac{\pi}{6},$$

$$\theta) f(x) = (x^2 + 1)\operatorname{arctg} x, \quad x = 1,$$

$$\iota) f(x) = x^3 \arcsin x, \quad x = 1/2,$$

$$\kappa) f(x) = 2e^x + \ln x, \quad x = 1,$$

$$\lambda) f(x) = e^x(\cos x + \sin x), \quad x = \frac{\pi}{2},$$

$$\nu) f(x) = \ln \operatorname{tg} x, \quad x = \pi/12,$$

$$\omicron) f(x) = \ln \sin(x^3 + 1), \quad x = 0,$$

$$\rho) f(x) = \ln^5 \operatorname{tg} 3x, \quad x = \frac{\pi}{12},$$

$$\mu) f(x) = \frac{e^x + \sin x}{xe^x}, \quad x = \frac{\pi}{2},$$

$$\xi) f(x) = x5^{\cos x}, \quad x = \pi,$$

$$\pi) f(x) = \operatorname{arctg} \ln x + \ln \operatorname{arctg} x, \quad x = 1,$$

$$\sigma) f(x) = \ln^2 \operatorname{arctg}(x/3), \quad x = 3.$$

Rozwiązanie.

ξ) Najpierw obliczamy pochodną w dowolnym punkcie:

$$f'(x) = (xe^{\cos x \cdot \ln 5})' = x'e^{\cos x \cdot \ln 5} + x(e^{\cos x \cdot \ln 5})' = 1 \cdot e^{\cos x \cdot \ln 5} + xe^{\cos x \cdot \ln 5}(\cos x \cdot \ln 5)' =$$

$$e^{\cos x \cdot \ln 5} + xe^{\cos x \cdot \ln 5}(-\sin x \cdot \ln 5) = e^{\cos x \cdot \ln 5}(1 - x \sin x \ln 5).$$

Następnie wstawiamy $x = \pi$, otrzymujemy $f'(\pi) = e^{-\ln 5} \cdot 1 = e^{-\ln 5} = \frac{1}{5}$.

11. Niech $f(x) = \frac{2|x-1|}{x^2-x+1}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zbadaj: a) ciągłość funkcji f . b) różniczkowalność funkcji f .

Rozwiązanie. Ponieważ $x^2 - x + 1 > 0$ dla każdego x , to $Df = \mathbb{R}$. Ponieważ funkcja f powstała z wielomianów i modułu (które są ciągłe) przez zastosowanie operacji algebraicznych, więc jest funkcją ciągłą. Wielomiany są różniczkowalne, a $|x|$ jest różniczkowalny wszędzie poza punktem 0. Zatem funkcja f jest różniczkowalna wszędzie poza punktem $x = 1$. Różniczkowalność w punkcie $x = 1$ sprawdzimy z definicji, obliczając pochodne jednostronne. $f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1}{h} \left(\frac{2|1+h-1|}{(1+h)^2-(1+h)+1} - 0 \right) =$

$$0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-2h}{h(h^2+h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-2}{h^2+h+1} = -2, \quad f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \left(\frac{2|1+h-1|}{(1+h)^2-(1+h)+1} - 0 \right) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h}{h(h^2+h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2}{h^2+h+1} = 2. \text{ Są one różne, więc pochodna } f'(1) \text{ nie istnieje. Zatem funkcja } f$$

nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 1$.