

Kognitywistyka, zadania 3, granica funkcji

1. Znajdź granice korzystając z definicji Heinego:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} x^n, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}, \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x.$$

2. Znajdź następujące granice:

$$\begin{aligned} \delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}, \quad \varepsilon) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{(x-3)^2}, \\ \zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^7 - 7x^3 + 37, \quad \eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 - 7x^3 + 37, \quad \vartheta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \\ \iota) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \quad \kappa) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2+2x^5}, \quad \lambda) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}, \\ \mu) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-6x^2+11x-6}, \quad \nu) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{4+5x}-7}{x-9}, \quad \xi) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3+3x}}. \end{aligned}$$

3. Znajdź granice:

$$\pi) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{1-x} \right), \quad o) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+x^3+\dots+x^{2017}-2017}{x-1}, \quad \rho) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

4. Oblicz granice:

$$\begin{aligned} \sigma) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x^2-3}{x|2x-1|}, \quad \tau) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x^3-1} \right), \quad \upsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-(x+1)^3}{x^2-(3+2x)^2}, \\ \phi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a-1}{x}, \quad \chi) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 + 2x - \frac{x^3}{x-1} \right), \quad \psi) \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{4-x}{|x^2-6x+8|}, \quad \omega) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right), \\ \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\sin x}{x^2}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - \cos x), \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 \sin x^7}{\sin x^4 \sin x^6}, \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x^3}, \\ \varepsilon) \lim_{x \rightarrow \pi/2-} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}, \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{3/x}, \quad \eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{4x} \right)^{8x}, \quad \vartheta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}, \\ \iota) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{e^{8x}-1}, \quad \kappa) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 12x)}{\ln(1+\sin 6x)}, \quad \lambda) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-b^x}{x}, a, b > 1, \quad \mu) \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \sin x) \ln x, \\ \nu) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{1-e^{\sin x}}, \quad \xi) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}, \quad o) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x-2}. \end{aligned}$$

5. Zbadaj, czy istnieją następujące granice:

$$\begin{aligned} \pi) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x, \quad \rho) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x-1}}, \\ \sigma) \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ gdzie } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ 2 & \text{dla } x > 0, \end{cases} \quad \tau) \lim_{x \rightarrow 0} (2 + \sin x)^{1/x}, \\ \upsilon) \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ gdzie } f(x) = \begin{cases} |\cos x| & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} & \text{dla } x > 0, \end{cases} \quad \varphi) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}. \end{aligned}$$

6. Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ oraz $\chi) \lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = 3$. $\psi) \lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = +\infty$. $\omega) \lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = -\infty$.

7. Oblicz stopień wielomianu w , jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{w(x)}{x^2-x+1} = 4$.

8. Wykres funkcji kwadratowej w przecina osie współrzędnych w punktach $(0, 2)$, $(-1, 0)$ i $(3, 0)$. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} w\left(\frac{1}{x}\right), \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} w\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad c) \lim_{x \rightarrow 3} w\left(\frac{2}{x-3}\right).$$

9. Znajdź równania asymptot wykresu funkcji:

$$\begin{aligned} a) f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}, \quad b) g(x) = \frac{e^x}{x}, \\ c) h(x) = \frac{2x}{x^2(x+1)^2}, \quad d) i(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2-4}, \quad e) j(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}, \quad f) k(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x, \\ g) l(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}, \quad h) m(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{x}}, \quad i) n(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2+x-2}. \end{aligned}$$

f) Rozwiązanie. Wykres funkcji k ma asymptotę pionową o równaniu $x = 0$, bo $\lim_{x \rightarrow 0+} k(x) = +\infty$. Innych asymptot pionowych nie ma, bo dla każdej liczby $z > 0$ granica funkcji k w punkcie z jest równa liczbie $k(z)$. Aby zbadać istnienie asymptoty ukośnej $+\infty$, należy znaleźć granicę $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x}$. Skorzystamy z ważnej nierówności $\ln(x) \leq x - 1$. Wynika z niej nierówność $\ln(x) < x$, a więc i nierówność $\ln \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x}$. Teraz skorzystamy z twierdzenia o trzech funkcjach: $0 \leq \frac{k(x)}{x} = \frac{1}{2x}(\ln x)^2 = \frac{1}{2x}(3 \ln \sqrt[3]{x})^2 < \frac{9}{2x} \sqrt[3]{x^2} = \frac{9}{2\sqrt[3]{x}}$. Prawa strona ostatniej nierówności dąży do 0 przy $x \rightarrow +\infty$, zatem $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = 0$. Znaczy to, że współczynnik kierunkowy ewentualnej asymptoty musi być równy $a = 0$. Obliczamy teraz granicę $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln^2 x = +\infty$. Granica istnieje, ale nie jest liczbą, więc asymptota ukośna nie istnieje.