

Kognitywistyka, zadania 1, ciągi

1. Znajdź największy wyraz ciągu: a) $(\frac{n}{n^2+9})$, b) $(2^{-n} - 3 \cdot 4^{-n})$.
2. Znajdź najmniejszy wyraz ciągu: a) $(\frac{2n-5}{2n-11})$, b) $(n - 5n^{-1})$.
3. Sprawdź, czy jest ograniczony ciąg: a) $(\frac{2n^2-1}{2+n^2})$, b) $(\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}})$, c) $(\frac{n^3-2n}{n^2+1})$.
4. Zbadaj, czy jest od pewnego miejsca monotoniczny ciąg:
a) $(\frac{3n+4}{n+2})$, b) $(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}})$, c) $(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$, d) $(\frac{2^n}{n})$, e) $(n - \log n)$.
5. Wykaż, że dla dowolnej liczby dodatniej x ciąg $((1 + \frac{x}{n})^n)$ jest rosnący.
6. Wykaż z definicji, że: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{2n-1} = \frac{3}{2}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} = 1$.
(a) Niech ϵ będzie dowolną liczbą dodatnią. Należy wykazać, że począwszy od pewnej liczby n_0 wszystkie liczby n spełniają nierówność $|\frac{3n+5}{2n-1} - \frac{3}{2}| < \epsilon$ czyli nierówność $|\frac{2(3n+5)-3(2n-1)}{2(2n-1)}| < \epsilon$, tzn. $|\frac{13}{4n-2}| < \epsilon$. Moduł można pominąć, bo wyrażenie wewnątrz modułu jest dodatnie niezależnie od n . Zauważmy, że $\frac{13}{4n-2} < \epsilon \Leftrightarrow 4n-2 > \frac{\epsilon}{13}$ czyli $n > \frac{1}{4}(2 + \frac{\epsilon}{13})$. Widzimy więc, że za n_0 można przyjąć dowolną liczbę większą od $\frac{1}{4}(2 + \frac{\epsilon}{13})$, np. $n_0 = \lfloor \frac{1}{4}(2 + \frac{\epsilon}{13}) + 1 \rfloor$.

7. Znajdź granicę ciągu:

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3-3n^2+1}{n^3+3} &= 5, & \beta) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) &= \frac{1}{2}, & \gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} (8 - \frac{1}{n^2})^{1/3} &= 2, \\ \delta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n^n} &= 0, & \epsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n) &= \frac{2}{3}, & \zeta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} (\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - 1) &= \frac{1}{3}, \\ \eta) \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}) &= -\frac{1}{2}, & \vartheta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5+3^{n+1}} &= 0, & \iota) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n} &= 0, \\ \kappa) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}} &= \frac{1}{6}, \lambda) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{\sqrt{n}} = 0, a > 1, \mu) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1} = 19800, \\ \nu) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{3n})^n &= e^{-1/3}, & \xi) \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^2-3n}{n^2})^{2n+7} &= e^{-6}, & o) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+0.25}{8n+1}} &= \frac{1}{2}, \\ \pi) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{8}-1}{\sqrt[5]{16}-1} &= \frac{3}{4}, & \rho) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[5]{16}-4\sqrt[5]{8}+1}{(\sqrt[5]{2}-1)^2} &= 6, & \sigma) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)} &= -2, \\ \tau) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}} &= +\infty, & \upsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n+3}{n^2})^n &= 0, & \varphi) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n+5}{n-0.5}} &= 1, \\ \chi) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n+2^n+1} &= 3, & \psi) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2n}} &= 1, & \omega) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2-5n+3}{n^5+1}} &= 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie $\xi)$ $(\frac{n^2-3n}{n^2})^{2n+7} = (1 + \frac{-3}{n})^{2n} \cdot (1 + \frac{-3}{n})^7 = ((1 + \frac{-3}{n})^{-n/3})^{-6} \cdot (1 + \frac{-3}{n})^7$. Pierwszy czynnik dąży do e^{-6} , a drugi do 1. Zatem iloczyn ma granicę e^{-6} .

8. Znajdź granicę ciągu lub wykaż, że ta granica nie istnieje:

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3+3^n) \cos(n\pi)}{n+3^{n+1}}, & \beta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}-1}{1+n \cdot 1.1^n}, & \gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n+n \cdot 2^n}, & \delta) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}, \\ \epsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2n-1}{2n+7}} \right)^{5n}, & \zeta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}, & \eta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{(n+2)!}, & \vartheta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{0.3^n \cdot n!}, & \iota) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n \cdot 3^n + 1) \sin n}{n! + 1}, \\ \kappa) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n\sqrt{n}\sqrt{n+1}}, & \lambda) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n, & \mu) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n^2})^n, & \nu) \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n+5}{2n+3})^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+5}\right)^n, \quad o) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{n+1}, \quad \pi) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n}), \quad \rho) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}, \\ \sigma) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right), \tau) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} + (-1)^n) 2^{1/n}, \nu) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right), \\ \varphi) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2\sqrt[n]{2}-1}, \quad \chi) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \psi) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^n, \quad \omega) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie $\sigma)$ Skoro $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e - 1$.

9. Wykaż istnienie granicy: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}\right)$.
Wsk. w a) skorzystaj z tego, że $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ dla $k > 1$.
10. Wykaż, że iloczyn ciągu ograniczonego przez ciąg zbieżny do zera jest ciągiem zbieżnym do zera.
11. W ciągu (a_n) podciągi (a_{2k}) oraz (a_{2k+1}) są zbieżne do granicy g . Wykaż, że ciąg (a_n) też jest zbieżny do granicy g .
12. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n) zbieżnych do zera, że:
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ nie istnieje.
13. Podaj przykład takich ciągów rozbieżnych (a_n) i (b_n) , że zbieżny jest ciąg:
 - a) $(a_n + b_n)$, b) $(a_n b_n)$, c) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.