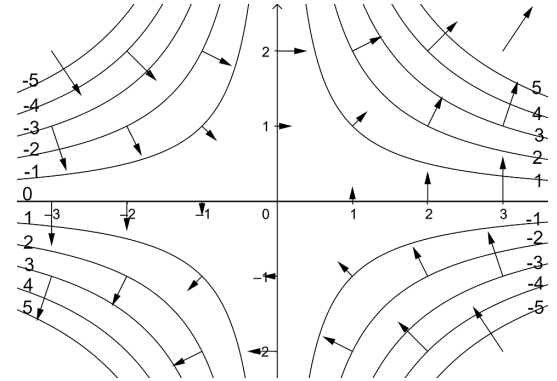


1. Wyrażenia, których wartość zależy od dwóch zmiennych nazywamy funkcjami dwóch zmiennych. Na przykład  $f(x, y) = x + 2y - 50$  i  $g(x, y) = \sin(xy^2)$  są funkcjami dwóch zmiennych  $x, y$ . Za dziedzinę funkcji  $f(x, y)$  dwóch zmiennych  $x, y$  uważamy zbiór  $D_f$  tych wszystkich par liczb  $(x, y)$ , dla których da się obliczyć wartość  $f(x, y)$ .
2. Przykład. Niech  $a(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{xy}$  oraz  $b(x, y) = \log_2(x^2 + y^2 - 9)$ . Dziedziną funkcji  $a(x, y)$  jest część płaszczyzny leżąca na prostej  $x + y + 1 = 0$  i powyżej niej za wyjątkiem punktów leżących na osiach układu współrzędnych. Dziedziną funkcji  $b(x, y)$  jest zbiór punktów leżących na zewnątrz okręgu o środku w punkcie  $(0, 0)$  i promieniu 3.
3. Definicja. Wykresem funkcji  $f(x, y)$  nazywamy zbiór  $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\}$ , gdzie  $D$  oznacza dziedzinę funkcji  $f$ . Wykres ten można sobie wyobrażać jako powierzchnię unoszącą się nad lub pod dziedziną, która jest podzbiorem płaszczyzny. Pewną informację o tym, jak ten wykres wygląda, dają poziomice oraz przekroje pionowe wzdłuż osi  $x$  oraz wzdłuż osi  $y$ .
4. Definicja. Poziomicą funkcji  $f(x, y)$  odpowiadającą wartości  $c$  nazywamy zbiór  $I_f(c)$  tych wszystkich punktów  $(x, y) \in D_f$ , w których funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $c$ . Poziomice nazywa się również warstwicami.
5. Przykład. Poziomica jest podzbiorem dziedziny, więc jest zawarta w płaszczyźnie, jednak patrząc na nią z góry (tzn. z kierunku osi  $z$ ), można ją sobie wyobrazić jako ścieżkę na wykresie łączącą punkty leżące na jednej wysokości. Patrząc na tę poziomice, a także na poziomice leżące na innych wysokościach, łatwiej jest wyrobić sobie pogląd na temat wyglądu wykresu danej funkcji. Poziomice można też wyobrażać sobie jako linię brzegową po zalaniu wykresu wodą do odpowiedniego poziomu.
6. Przykład. Poziomice funkcji  $f(x, y) = x^2 - y^2$  odpowiadające wartościom  $-1, 0, 1, 2$ , to: hiperbola o równaniu  $x^2 - y^2 = -1$ , para prostych  $x^2 - y^2 = 0$  oraz hiperbole o równaniach  $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 2$ . Przekroje płaszczyznami  $x = \text{const}$  są smutnymi parabolami, a przekroje płaszczyznami  $y = \text{const}$  są uśmiechniętymi parabolami. Ta powierzchnia ma kształt siodła lub przełęczy.
7. Przykład. Poziomice funkcji  $f(x, y) = x^2 + y^2$  odpowiadające wartościom  $-1, 0, 1, 2$ , to: zbiór pusty, punkt  $(0, 0)$ , oraz okręgi o równaniach  $x^2 + y^2 = 1$  i  $x^2 + y^2 = 2$ . Przekroje płaszczyznami  $x = \text{const}$  oraz  $y = \text{const}$  są uśmiechniętymi parabolami. Ta powierzchnia ma kształt pucharu.  
Pewną informację o wyglądzie przekrojów pionowych dają pochodne cząstkowe:
8. Definicja. Pochodną cząstkową funkcji  $f(x, y)$  w punkcie  $(x_0, y_0) \in D_f$  ze względu na zmienną  $x$  nazywamy pochodną funkcji  $f(x, y_0)$  zmiennej  $x$  w punkcie  $x_0$ . Pochodną tę oznaczamy symbolem  $f'_x(x_0, y_0)$  lub symbolem  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ . Podobnie określamy pochodną cząstkową  $f'_y(x_0, y_0)$  ze względu na zmienną  $y$ . Zamiast mówić "pochodna ze względu na  $y$ " mówi się też w skrócie "pochodna po zmiennej  $y$ " lub "pochodna po  $y$ ".  
Pochodne cząstkowe oblicza się tak samo, jak zwykle pochodne, należy tylko pamiętać, że licząc pochodną po jednej zmiennej, drugą zmienną traktujemy jako stałą.
9. Przykład. Obliczymy pochodne cząstkowe funkcji  $f(x, y) = x^5 y^3 - 2xy^2 + 6$  w punkcie  $(2, -1)$ . Obliczamy najpierw pochodne w dowolnym punkcie:  $f'_x(x, y) = 5x^4 y^3 - 2y^2$ ,  $f'_y(x, y) = 3x^5 y^2 - 4xy$ , a następnie wstawiamy  $x = 2, y = -1$  i otrzymujemy  $f'_x(2, -1) = -82$ ,  $f'_y(2, -1) = 104$ .
10. Uwaga. Dalej będziemy rozpatrywać tylko funkcje mające ciągłe pochodne cząstkowe i nie będziemy tego założenia powtarzać w kolejnych twierdzeniach. Odpowiada ono różniczkowalności. Funkcje opisane jednym wzorem (bez klamerek) przy pomocy funkcji elementarnych spełniają to założenie.
11. Twierdzenie. Wzór przybliżony na wartość funkcji, dla liczb  $x, y$  niewiele różniących się od  $x_0$  i  $y_0$ :  
$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

12. Przykład. Obliczymy przybliżoną wartość wyrażenia  $\sqrt[4]{2.11^2 + 3 \cdot 1.95^2}$ . Niech  $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + 3y^2}$ . Chcemy obliczyć wartość  $f(2.11; 1.95)$ , przyjmujemy  $x_0 = 2, y_0 = 2$  i obliczamy  $f(x_0, y_0) = f(2, 2) = 2$ ,  $f'_x(x, y) = ((x^2 + 3y^2)^{1/4})'_x = \frac{1}{4}(x^2 + 3y^2)^{-3/4} \cdot 2x$ , zatem  $f'_x(2, 2) = \frac{1}{4} \cdot 16^{-3/4} \cdot 4 = \frac{1}{8}$ ;  $f'_y(x, y) = ((x^2 + 3y^2)^{1/4})'_y = \frac{1}{4}(x^2 + 3y^2)^{-3/4} \cdot 6y$ , zatem  $f'_y(2, 2) = \frac{1}{4} \cdot 16^{-3/4} \cdot 12 = \frac{3}{8}$ . Z podanego wyżej wzoru wynika, że  $f(2.11; 1.95) \approx 2 + \frac{1}{8} \cdot 0.11 + \frac{3}{8} \cdot (-0.05) = 1.995$ . Kalkulator daje wynik 1.995598....
13. Definicja. Wektor  $\text{grad } f(x_0, y_0) = [f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)]$  nazywamy gradientem funkcji  $f(x, y)$  w punkcie  $(x_0, y_0) \in D_f$ . Jego współrzędnymi są pochodne cząstkowe funkcji  $f$  po zmiennych  $x$  i  $y$  w punkcie  $(x_0, y_0)$ .
14. Przykład. Na rysunku obok są przedstawione poziomicie funkcji  $f(x, y) = xy$  oraz jej gradient w niektórych punktach (skrócono pięć razy dla zwiększenia czytelności rysunku). Zauważmy, że każdy z tych wektorów wskazuje kierunek największego wzrostu wartości funkcji i że jest prostopadły do poziomici przechodzącej przez dany punkt. Wartości funkcji na poziomicach są zaznaczone po bokach rysunku. Gradient w punkcie  $(0, 0)$  jest zerowy.
- 
15. Twierdzenie. Gradient  $\text{grad } f(x_0, y_0)$  funkcji  $f(x, y)$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  ma następujące własności:
1. jest prostopadły do poziomici przechodzącej przez punkt  $(x_0, y_0)$ ,
  2. wskazuje kierunek największego wzrostu wartości funkcji  $f$ ,
  3. jego długość zależy od nachylenia wykresu w punkcie  $(x_0, y_0)$ : długi gradient oznacza, że wykres jest stromy w punkcie  $(x_0, y_0)$ , zerowy gradient oznacza, że w punkcie  $(x_0, y_0)$  wykres nie jest nachylony w żadnym kierunku.
16. Definicja. Punktem stacjonarnym funkcji  $f(x, y)$  nazywamy każdy taki punkt  $(x_0, y_0) \in D_f$ , że  $\text{grad } f(x_0, y_0) = [0, 0]$ , tzn. taki punkt, w którym obie pochodne cząstkowe funkcji  $f$  są równe 0. Można go sobie wyobrazić w sposób następujący: jeśli na wykresie w tym punkcie położymy piłkę, to się ona nie stoczy, bo wykres nie jest nachylony w żadnym kierunku. Dla funkcji  $f(x, y) = xy$  punktem stacjonarnym jest  $(0, 0)$ .
17. Definicja. Oprócz pochodnych cząstkowych stosuje się czasem także pochodne cząstkowe pochodnych cząstkowych, czyli tzw. pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Funkcja dwóch zmiennych  $f(x, y)$  ma cztery takie pochodne:  $f''_{xx}(x, y) = (f'_x)'_x(x, y)$ ,  $f''_{xy}(x, y) = (f'_x)'_y(x, y)$ ,  $f''_{yx}(x, y) = (f'_y)'_x(x, y)$ ,  $f''_{yy}(x, y) = (f'_y)'_y(x, y)$ . Wiadomo, że jeśli te pochodne drugiego rzędu są funkcjami ciągłymi dwóch zmiennych, to zachodzi równość  $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ . Pochodne drugiego rzędu często zapisujemy w postaci macierzy (tzw. macierzy Hessego)

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

W wielu zastosowaniach matematyki bardzo istotne jest znajdowanie ekstremów lokalnych funkcji dwóch zmiennych.

18. Definicja. Funkcja  $f(x, y)$  ma w punkcie  $(x_0, y_0) \in D_f$  maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy jej wartość  $f(x_0, y_0)$  jest większa lub równa od wartości we wszystkich punktach leżących w pobliżu punktu  $(x_0, y_0)$ . Podobnie, funkcja  $f(x, y)$  ma w punkcie  $(x_0, y_0) \in D_f$  minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy jej wartość  $f(x_0, y_0)$  jest mniejsza lub równa od wartości we wszystkich punktach leżących

w pobliżu punktu  $(x_0, y_0)$ . Obie te sytuacje możemy sobie wyobrazić, jako górkę lub odpowiednio dołek na wykresie. Mówimy, że funkcja  $f(x, y)$  ma w punkcie  $(x_0, y_0) \in D_f$  ekstremum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie maksimum lokalne lub minimum lokalne.

19. Uwaga. Jeśli funkcja  $f$  ma w punkcie  $(x_0, y_0)$  ekstremum lokalne, to ten punkt jest punktem stacjonarnym.
20. Ekstrema lokalne funkcji  $f(x, y)$  znajdujemy w następujący sposób.
  1. Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji  $f(x, y)$ .
  2. Znajdujemy punkty stacjonarne  $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots$  funkcji  $f(x, y)$ .
  3. Dla każdego z punktów stacjonarnych  $P_i$  obliczamy wyznacznik  $H(x_i, y_i)$  (tzw. hesjan) macierzy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu w tym punkcie.
    - 3a. Jeśli  $H(x_i, y_i) < 0$ , to  $P_i$  jest tzw. punktem siodłowym i funkcja  $f$  nie ma w nim ekstremum lokalnego.
    - 3b. Jeśli  $H(x_i, y_i) > 0$ , to funkcja  $f$  ma w punkcie  $P_i$  ekstremum lokalne:
      - jest to minimum lokalne, jeśli  $f''_{xx}(x_i, y_i) > 0$ ,
      - a jest to maksimum lokalne, jeśli  $f''_{xx}(x_i, y_i) < 0$ .
21. Przykład. Znajdziemy ekstrema lokalne funkcji  $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy - 21$ . Zaczynamy od obliczenia pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu:  $f'_x(x, y) = 3x^2 + 2y, f'_y(x, y) = 2y + 2x$ . Punkty stacjonarne znajdujemy rozwiązując układ równań:
 
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2y + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2y = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 2x = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff (x = 0, y = 0) \text{ lub } (x = \frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}).$$
 Mamy więc dwa punkty stacjonarne:  $P_1 = (0, 0)$  oraz  $P_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ . Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu i ustawiamy je w macierzy:  $f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Ponieważ  $H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$ , to  $P_1$  jest punktem siodłowym i funkcja  $f$  nie ma w nim ekstremum lokalnego. Widzimy, że  $H(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ , więc funkcja  $f$  ma w punkcie  $P_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$  ekstremum lokalne. Ponieważ  $f''_{xx}(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = 4 > 0$ , jest to minimum lokalne.
22. Rozpatrzmy teraz funkcję dwóch zmiennych  $f(x, y)$  określoną na zbiorze  $D \subset \mathbb{R}^2$  oraz krzywą  $G$  opisaną w  $D$  równaniem  $g(x, y) = 0$ . Funkcja  $f$  jest określona na zbiorze  $D$ , ale nas będą interesować tylko jej wartości w punktach krzywej  $G$ . Omówimy metodę Lagrange'a znajdowania ekstremów lokalnych funkcji  $f$  na krzywej  $G$ .
23. Definicja. Funkcja  $f$  ma na krzywej  $G$  w punkcie  $P \in G$  maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba dodatnia  $r$ , że  $f(x, y) \leq f(P)$  dla wszystkich punktów  $(x, y)$  leżących na  $G$  w odległości mniejszej niż  $r$  od punktu  $P$ . Analogicznie określa się minimum lokalne.
24. Twierdzenie. Jeśli funkcja  $f(x, y)$  ma na krzywej  $G$  w punkcie  $(x_0, y_0) \in G$  ekstremum lokalne oraz  $\text{grad } g(x_0, y_0) \neq 0$ , to istnieje taka liczba  $\lambda \in \mathbb{R}$ , że  $\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{grad } g(x_0, y_0)$ . Punkty krzywej  $G$  spełniające ten warunek nazywają się punktami stacjonarnymi.

(Jeśli gradient funkcji  $f(x, y)$  w jakimś punkcie krzywej  $G$  jest równoległy do tej krzywej, to funkcja  $f$  rośnie (lub maleje), gdy posuwamy się po krzywej w kierunku tego wektora. Podobnie dzieje się, jeśli wektor  $\text{grad } f(x, y)$  ma kierunek ukośny w stosunku do krzywej  $G$ . Zatem w takich punktach funkcja  $f$  nie może mieć ekstremum lokalnego na  $G$ . Pozostają więc punkty, w których  $\text{grad } f(x, y)$  jest prostopadły do krzywej  $G$ . Zwróćmy uwagę na to, że krzywa  $G$  opisana równaniem  $g(x, y) = 0$  jest poziomicą funkcji  $g(x, y)$ . Z tego wynika, że w każdym punkcie krzywej  $G$  jest do niej prostopadły

wektor  $\text{grad } g(x, y)$ . Widać więc, że jeśli funkcja  $f$  ma ekstremum lokalne na  $G$  w punkcie  $(x, y)$ , to wektory  $\text{grad } f(x, y)$  i  $\text{grad } g(x, y)$  są równoległe, a więc  $\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y)$  dla pewnej liczby  $\lambda$ .)

25. Uwaga. Powyższy warunek jest konieczny, ale nie wystarczający, tzn. równość  $\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{grad } g(x_0, y_0)$  nie gwarantuje tego, że funkcja  $f(x, y)$  ma ekstremum lokalne w punkcie  $(x_0, y_0)$ .

26. Definicja. W sytuacji jak wyżej, niech  $L(\lambda, x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ . Jest to tzw. funkcja Lagrange'a.

Wyznacznik  $H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$  nazywa się hesjanem, a liczba  $\lambda$  mnożnikiem Lagrange'a.

Zauważmy, że  $L'_x(\lambda, x, y) = f'_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y)$ ,  $L'_y(\lambda, x, y) = f'_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y)$ ,  $L'_\lambda = g(x, y)$ .

27. Twierdzenie. (Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego.) Niech punkt  $(x_0, y_0)$  leży na krzywej  $G$  oraz  $\text{grad } L(\lambda, x_0, y_0) = 0$ . Jeśli  $H(\lambda, x_0, y_0) > 0$ , to funkcja  $f$  ma na  $G$  maksimum lokalne w punkcie  $(x_0, y_0)$ . Jeśli  $H(\lambda, x_0, y_0) < 0$ , to funkcja  $f$  ma na  $G$  minimum lokalne w punkcie  $(x_0, y_0)$ .

28. Uwaga. Jeżeli  $H(\lambda, x_0, y_0) = 0$ , to funkcja  $f$  może zarówno mieć jak i nie mieć ekstremum lokalnego w punkcie  $(x_0, y_0)$ .

29. Przykład. Znajdziemy ekstrema lokalne funkcji  $f(x, y) = xy$  na elipsie  $G = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 8\}$ . Wyznaczamy funkcję Lagrange'a  $L(\lambda, x, y) = xy - \lambda(4x^2 + y^2 - 8)$ . Punkty stacjonarne znajdujemy

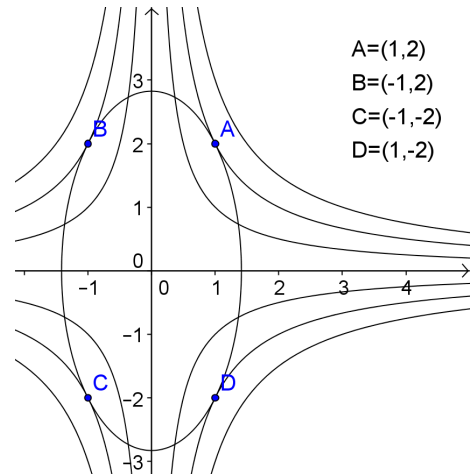
$$\text{z równania } \text{grad } L(\lambda, x, y) = 0 \text{ czyli z układu } \begin{cases} f'_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \text{ tzn. } \begin{cases} y - 8\lambda x = 0, \\ x - 2\lambda y = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Układ ten spełniają następujące trójki liczb  $(\lambda, x, y)$ :

$$t_A = (\frac{1}{4}, 1, 2), t_B = (-\frac{1}{4}, -1, 2), t_C = (\frac{1}{4}, -1, -2), t_D = (-\frac{1}{4}, 1, -2). \text{ Zatem punktami stacjonarnymi są } A = (1, 2), B = (-1, 2), C = (-1, -2), D = (1, -2).$$

$$\text{Znajdujemy hesjan } H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 8x & 2y \\ 8x & -8\lambda & 1 \\ 2y & 1 & -2\lambda \end{vmatrix} \text{ i}$$

obliczamy jego wartość dla każdej znalezionej trójki. Ponieważ  $H(\frac{1}{4}, 1, 2) = H(\frac{1}{4}, -1, -2) = 128 > 0$  oraz  $H(-\frac{1}{4}, -1, 2) = H(-\frac{1}{4}, 1, -2) = -128 < 0$ , to  $f$  ma maksima lokalne w punktach  $A = (1, 2)$  oraz  $C = (-1, -2)$ , a minima lokalne w punktach  $B = (-1, 2)$  i  $D = (1, -2)$ .



30. Przykład. Spróbujemy sprawdzić, czy funkcja  $f(x, y) = y$  ma ekstremum lokalne na krzywej  $G = \{(x, y) : y - x^4 = 0\}$  w jej punkcie  $P = (0, 0)$ . Wyznaczamy funkcję Lagrange'a  $L(\lambda, x, y) = y - \lambda(y - x^4)$ . Sprawdzamy, że  $P$  jest punktem stacjonarnym i znajdujemy odpowiadającą mu wartość

$$\lambda = 1. \text{ Znajdujemy hesjan } H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & -3x^2 & 1 \\ -3x^2 & 6\lambda x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, H(1, 0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \text{ Widzimy, że}$$

$H(1, 0, 0) = 0$ . Zatem przy pomocy poznanego twierdzenia nie da się stwierdzić, czy funkcja  $f$  ma na  $G$  w punkcie  $(1, 1)$  ekstremum lokalne. Proponuję naszkicować poziomice funkcji  $f$  oraz krzywą  $G$  i odczytać odpowiedź z uzyskanego szkicu.