

Wykład poświęcony będzie standardowemu iloczynowi skalarnemu w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

1. Definicja. Niech $v = (v_1, \dots, v_n)$ oraz $w = (w_1, \dots, w_n)$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Standardowym iloczynem skalarnym wektorów v, w nazywamy liczbę rzeczywistą $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{k=1}^n v_k w_k$. Od tej pory będziemy opuszczać przymiotnik "standardowy", bo nie będziemy rozpatrywać innych iloczynów skalarnych.
2. Przy zapisie wektorów w postaci kolumn iloczyn skalarny wektorów wyraża się poprzez mnożenie macierzowe wektora-wiersza przez wektor-kolumnę: $\langle v, w \rangle = v^T w$.
3. Iloczyn skalarny ma następujące własności:
 - (a) jest symetryczny, tzn. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ dla dowolnych wektorów $v, w \in \mathbb{R}^n$.
 - (b) jest dwuliniowy, tzn. $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$ oraz $\langle v, au + bw \rangle = a\langle v, u \rangle + b\langle v, w \rangle$ dla dowolnych wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b .
 - (c) jest dodatnio określony, tzn. $\langle v, v \rangle > 0$ dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

Przy pomocy iloczynu skalarnego określa się m.in. następujące pojęcia: długość wektora, kąt między wektorami, prostopadłość wektorów.

4. Definicja. Długością wektora $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}$.
5. Przykład. Długości wektorów $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (jedynek na k -tym miejscu) bazy standardowej są równe 1.
6. Przykład. Długość wektora $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ jest równa $\sqrt{n}$.
7. Definicja. Kąt między wektorami $v, w \in \mathbb{R}^n$ jest określony jako taki kąt $\alpha \in [0, \pi]$, że $\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{|v| \cdot |w|}$, tzn. $\alpha = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{|v| \cdot |w|}$.
8. Definicja. Wektory $v, w \in \mathbb{R}^n$ nazywają się prostopadłe (inaczej: ortogonalne) wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle v, w \rangle = 0$.
9. Przykład. Obliczmy kąt α między wektorami $v = (1, 1, 1, -1), w = (-1, 1, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Długości tych wektorów są równe 2, ich iloczyn skalarny jest równy $\langle v, w \rangle = -2$, więc $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. Zatem $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
10. Przykład. Zbiór $v^\perp$ wszystkich wektorów w $\mathbb{R}^n$ prostopadłych do wektora $v = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią liniową opisaną w $\mathbb{R}^n$ równaniem $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$.
11. Definicja. Układ wektorów $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ nazywa się układem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa wektory tego układu są ortogonalne.
12. Definicja. Układ wektorów $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ nazywa się układem ortonormalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest ortogonalny oraz długości wszystkich wektorów są równe 1.
13. Przykład. Układ wektorów $(1, 2, 3), (1, 1, -1), (5, -4, 1) \in \mathbb{R}^3$ jest ortogonalny. Dzieląc te wektory przez ich długości otrzymujemy układ ortonormalny: $\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{42}}(5, -4, 1) \in \mathbb{R}^3$.
14. Przykład. Baza standardowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest ortonormalna.
15. Przykład. Układ wektorów $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1), \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ jest bazą ortonormalną.

16. Twierdzenie. Współrzędne wektora v w bazie ortogonalnej $u_1, u_2, \dots, u_n$ są równe $\frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}, \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle}, \dots, \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle}$.

Dowód. Zapiszmy wektor v jako kombinację liniową wektorów $u_1, u_2, \dots, u_n$: $v = \sum_{j=1}^n a_j u_j$. Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor u_k otrzymujemy $\langle v, u_k \rangle = \langle a_1 u_1, u_k \rangle + \langle a_2 u_2, u_k \rangle + \dots + \langle a_n u_n, u_k \rangle = a_1 \langle u_1, u_k \rangle + a_2 \langle u_2, u_k \rangle + \dots + a_n \langle u_n, u_k \rangle = a_k \langle u_k, u_k \rangle$. Zatem $a_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$.

17. Wniosek. Współrzędne wektora v w bazie ortonormalnej $u_1, u_2, \dots, u_n$ są równe $\langle v, u_1 \rangle, \langle v, u_2 \rangle, \dots, \langle v, u_n \rangle$.
18. Przykład. Znajdziemy współrzędne wektora $v = (1, 1, 1)$ w bazie U : $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (1, 1, -1), u_3 = (5, -4, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. U jest bazą ortogonalną, więc te współrzędne są równe $\frac{6}{14}, \frac{1}{3}, \frac{2}{42}$.

19. Przykład. Znajdziemy współrzędne wektora $v = (1, 2, 3, 4)$ w bazie U : $u_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), u_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1), u_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), u_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$. U jest bazą ortonormalną, więc te współrzędne są równe: $\langle (1, 2, 3, 4), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \rangle = 5, \langle (1, 2, 3, 4), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1) \rangle = -2, \langle (1, 2, 3, 4), \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \rangle = -1, \langle (1, 2, 3, 4), \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \rangle = 0$, zatem $v = 5u_1 - 2u_2 - u_3$.

Jak widać, znajdowanie współrzędnych wektorów w bazach ortogonalnych, a zwłaszcza w ortonormalnych, jest znacznie prostsze niż w innych bazach. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ mamy bazę standardową, która jest ortonormalna. Jednak gdy zajmujemy się jakąś podprzestrzenią V przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wygodnie jest posługiwać się bazą podprzestrzeni V . Jak znaleźć bazę ortonormalną podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^n$? Zanim odpowiemy na to pytanie, nauczymy się rozkładać wektor na jego składową równoległą i składową prostopadłą do danej podprzestrzeni. Zaczniemy od przypadku, gdy podprzestrzeń ma wymiar 1.

20. Przykład. Rozpatrzmy wektor $v \in \mathbb{R}^n$ oraz jednowymiarową podprzestrzeń liniową $U = \text{lin}(u)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Zapiszmy v w postaci sumy wektora równoległego do u i wektora prostopadłego do u . Składowa równoległa do u będzie oczywiście postaci au , gdzie $a \in \mathbb{R}$. Zapiszmy więc $v = au + (v - au)$ i dobierzmy liczbę a tak, żeby wektor $v - au$ był prostopadły do U tzn. $\langle v - au, u \rangle = 0$ tzn. $\langle v, u \rangle = a \langle u, u \rangle$ czyli $a = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle}$. Zatem składową wektora v równoległą do u jest wektor $\frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$, a składową prostopadłą do u jest wektor $v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$.

21. Przykład. Rozłóżmy wektor $w = (-1, 10, 3) \in \mathbb{R}^3$ na sumę wektora równoległego do wektora $u = (1, 2, 3)$ i wektora prostopadłego do u . Obliczamy $\langle v, u \rangle = 28, \langle u, u \rangle = 14$. Ze wzoru z poprzedniego przykładu wynika, że składowa równoległa do u jest równa $\frac{28}{14}(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$, a składowa prostopadła do u jest równa $(-1, 10, 3) - (2, 4, 6) = (-3, 6, -3)$.

Podobnie można postąpić w celu rozłożenia wektora $v \in \mathbb{R}^n$ na składową równoległą i składową prostopadłą do podprzestrzeni większego wymiaru.

22. Twierdzenie. Jeśli $u_1, \dots, u_k$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i dany jest wektor $v \in \mathbb{R}^n$, to wektor $v_U = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$ jest składową v równoległą do U , a wektor $v - v_U$ jest składową wektora v prostopadłą do U .

23. Wniosek. Jeśli $v_1, \dots, v_k$ jest bazą podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to bazę ortogonalną $u_1, u_2, \dots, u_k$ przestrzeni V możemy skonstruować tak:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1, \\ &\dots \dots \dots \\ u_k &= v_k - \frac{\langle v_k, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_k, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \dots - \frac{\langle v_k, u_{k-1} \rangle}{\langle u_{k-1}, u_{k-1} \rangle} u_{k-1}. \end{aligned}$$

Jest to tzw. ortogonalizacja Grama – Schmidta. Polega ona na zastępowaniu kolejnych wektorów przez ich składowe prostopadłe do podprzestrzeni rozpiętej przez poprzednie wektory.

24. Przykład. Znajdźmy bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której pierwszym wektorem będzie $u = (1, 1, -1)$. Zaczynamy od dopełnienia wektora u do bazy $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 1, -1)$, $v = (0, 1, 0)$, $w = (0, 0, 1)$. Można to było zrobić na wiele sposobów. Wybraliśmy takie wektory, bo skoro tworzą schodki, to są liniowo niezależne, a skoro jest ich trzy, to rozpinają całą przestrzeń. Jako pierwszy wektor nowej bazy, zgodnie z warunkami zadania, przyjmujemy $u_1 = u = (1, 1, -1)$. Jako drugi przyjmujemy składową prostopadłą wektora v do przestrzeni $\text{lin}(u_1)$, tzn. $u_2 = v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (0, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, -1) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Jako trzeci wektor przyjmujemy składową prostopadłą wektora w do przestrzeni $\text{lin}(u_1, u_2)$, tzn. $u_3 = w - \frac{\langle w, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle w, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = (0, 0, 1) - \frac{-1}{3}(1, 1, -1) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}}(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Otrzymaliśmy więc bazę $u_1 = u = (1, 1, -1)$, $u_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $u_3 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Jeśli wolimy nie mieć ułamków, to możemy za wektory bazy przyjąć wielokrotności otrzymanych wektorów: $u'_1 = u = (1, 1, -1)$, $u'_2 = (-1, 2, 1)$, $u'_3 = (1, 0, 1)$. One też tworzą bazę ortogonalną. Jeśli natomiast chcemy mieć bazę ortonormalną, to dzielimy wektory przez ich długości i otrzymujemy $u''_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$, $u''_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$, $u''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. Metodę ortogonalizacji można stosować w dowolnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ może się przydać tzw. iloczyn wektorowy wektorów.
25. Definicja. Niech $u = (a, b, c)$, $w = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ oznaczają dowolne wektory. Iloczynem wektorowym wektorów u, w nazywa się wektor $u \times w := \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right)$.
26. Twierdzenie. Iloczyn wektorowy wektorów u, w ma następujące własności:
- 1) $u \times w$ jest prostopadły do obu wektorów u, w .
 - 2) wyznacznik macierzy, której wierszami są kolejno wektory $u, w, u \times w$, jest nieujemny.
 - 3) długość wektora $u \times w$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach u, w .
27. Przykład. Wektorem kierunkowym prostej opisanej układem równań $\begin{cases} x - 2y + z = 5, \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ jest wektor $(1, -2, 1) \times (3, 1, -1) = (1, 4, 7)$.
28. Przykład. Znowu znajdziemy bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której pierwszym wektorem będzie $u = (1, 1, -1)$. Jako drugi wektor przyjmujemy dowolny wektor prostopadły do u , np. $v = (1, 1, 2)$, a jako trzeci $w = u \times v = (3, -3, 0)$.
Teraz zajmujemy się przekształceniami.
29. Definicja. Endomorfizm f przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywa się izometrią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ dla wszystkich wektorów $v, w \in \mathbb{R}^n$.
30. Wniosek. Izometria liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zachowuje długości wektorów (a więc i odległości punktów), kąty oraz wszystkie inne wielkości wyrażające się przez iloczyn skalarny.
31. Uwaga. Przymiotnik "liniowa" jest użyty dla podkreślenia, że chodzi o te izometrie, które są przekształceniami liniowymi. Matematycy nazywają izometriami dowolne przekształcenia zachowujące odległości, niektóre z nich nie są liniowe, np. przesunięcie o pewien wektor. Można wykazać, że każda izometria przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest złożeniem izometrii liniowej i przesunięcia.
32. Przykład. Przekształcenie $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ określone wzorem $\text{id}(v) = v$ jest izometrią liniową.
33. Przykład. Przekształcenie $-\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ określone wzorem $-\text{id}(v) = -v$ jest izometrią liniową, bo $\langle -\text{id}(v), -\text{id}(w) \rangle = \langle -v, -w \rangle = \langle v, w \rangle$ dla wszystkich wektorów $v, w \in \mathbb{R}^n$.
34. Twierdzenie. a) Złożenie dwóch izometrii liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest izometrią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$. b) Każda izometria liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$ posiada przekształcenie odwrotne, które też jest izometrią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Zobaczmy teraz, jak warunek na bycie izometrią liniową wygląda w terminach macierzy.

35. Twierdzenie. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $A = M(f)_{\text{st}}^{\text{st}}$ będzie jego macierzą w bazie standardowej. Wtedy f jest izometrią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $A^T A = I$.

Dowód. Przypomnijmy, że $f(v) = A \cdot v$. Endomorfizm f jest izometrią liniową $\iff$ równość $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ zachodzi dla wszystkich $v, w \in \mathbb{R}^n$. Ta równość $\iff \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \iff (Av)^T (Aw) = v^T w \iff v^T A^T A w = v^T I w \iff v^T (A^T A - I) w = 0$ (*). Jeśli $A^T A = I$, to równość (*) zachodzi dla wszystkich v, w . Jeśli zachodzi dla wszystkich v, w , to w szczególności zachodzi dla wektorów $v = e_k, w = e_j$ bazy standardowej. Zauważmy, że liczba $e_k^T (A^T A - I) e_j$, to wyraz macierzy $A^T A - I$ na miejscu (k, j) . Zatem w macierzy $A^T A - I$ na miejscu (k, j) stoi liczba 0.

36. Definicja. Macierz kwadratowa A nazywa się ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A^T A = I$.
37. Wniosek. Macierz kwadratowa A jest ortogonalna $\iff$ jej kolumny tworzą bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^n \iff$ jest macierzą izometrii liniowej w bazie standardowej.
38. Stwierdzenie. Wyznacznik macierzy ortogonalnej A jest równy ± 1 .

Dowód. $1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A)^2$. Zatem $\det(A) = 1$ lub $\det(A) = -1$.

Omówimy teraz przykłady izometrii $\mathbb{R}^n$.

39. Twierdzenie. Każda izometria liniowa płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ jest obrotem lub symetrią prostopadłą względem pewnej prostej (tzn. podprzestrzeni liniowej wymiaru 1).

Dowód. Rozpatrzmy dowolną izometrię liniową F przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i jej macierz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ w bazach standardowych. Z definicji izometrii liniowej wynika, że kolumny macierzy M są prostopadłe i mają długość 1. Zatem liczby w pierwszej kolumnie, to $a = \cos \alpha, c = \sin \alpha$ dla pewnego kąta α . W $\mathbb{R}^2$ istnieją dokładnie dwa wektory długości 1 prostopadłe do wektora $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, mianowicie $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ oraz $(\sin \alpha, -\cos \alpha)$. Zatem albo macierz M jest równa $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ i jest macierzą obrotu o kąt α , albo jest równa $\begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ i jest macierzą symetrii prostopadłej względem dwusiecznej kąta między e_1 i $f(e_1)$.

40. Wniosek. Złożenie dwóch symetrii $\mathbb{R}^2$ jest obrotem, złożenie dwóch obrotów jest obrotem, złożenie symetrii z obrotem jest symetrią.

Dowód. Macierze symetrii mają wyznacznik -1 , zatem macierz ich złożenia ma wyznacznik równy $(-1)(-1) = 1$, zatem złożenie jest obrotem. Podobnie w pozostałych przypadkach.

41. Definicja. Endomorfizm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywa się symetrią prostopadłą $\iff$ w pewnej bazie ortonormalnej $B : u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ ma macierz diagonalną postaci $D(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ (na przekątnej najpierw k minus jedynek, potem $n - k$ jedynek). Wtedy f jest symetrią prostopadłą względem podprzestrzeni $\text{lin}(u_{k+1}, \dots, u_n)$.

42. Przykład. Przekształcenie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określone wzorem $f(x, y, z) = (-x, y, z)$ jest symetrią prostopadłą względem płaszczyzny $x = 0$.

43. Definicja. Endomorfizm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywa się rzutem prostopadłym $\iff$ w pewnej bazie ortonormalnej $B : u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ ma macierz diagonalną postaci $D(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (na przekątnej najpierw k jedynek, potem $n - k$ zer). Wtedy f jest rzutem prostopadłym na podprzestrzeń $\text{lin}(u_1, \dots, u_k)$. Uwaga: jeśli $k < n$, to rzut prostopadły nie jest izometrią.

44. Przykład. Przekształcenie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określone wzorem $f(x, y, z) = (x, y, 0)$ jest rzutem prostopadłym na płaszczyznę $z = 0$.

Na zakończenie podamy jeszcze jedną własność macierzy związaną z iloczynem skalarnym. Przypomnijmy, że dla dowolnej macierzy symetrycznej A istnieje baza $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych macierzy A .

45. Twierdzenie. Jeśli macierz A jest symetryczna, to jej wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe.

Dowód. Rozpatrzmy wektory własne v, w macierzy A , $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$, $\lambda \neq \mu$. Traktujemy te wektory jak kolumny. Zachodzą równości $\mu \langle v, w \rangle = \langle v, \mu w \rangle = v^T \mu w = v^T Aw = v^T A^T w = (Av)^T w = (\lambda v)^T w = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$. Zatem $(\mu - \lambda) \langle v, w \rangle = 0$. Ponieważ $\mu - \lambda \neq 0$, to $\langle v, w \rangle = 0$.

46. Wniosek. Dla dowolnej macierzy symetrycznej $A \in M(n \times n)$ istnieje baza ortonormalna $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych macierzy A .

Dowód. Wektory własne odpowiadające jednej wartości własnej λ (z dodanym wektorem zerowym) tworzą przestrzeń V_λ , wybieramy z niej bazę ortonormalną. Podprzestrzenie V_λ i V_μ odpowiadające różnym wartościom własnym λ, μ są prostopadłe, zatem wszystkie tak dobrane wektory tworzą bazę ortonormalną.

47. Wniosek. Każdą macierz symetryczną A można zapisać w postaci $A = CDC^{-1}$, gdzie D jest macierzą diagonalną, a C macierzą ortogonalną, a więc w szczególności $C^{-1} = C^T$.