

1. Na tym wykładzie zajmować się będziemy przekształceniami liniowymi $f : V \rightarrow V$ (z przestrzeni V w tę samą przestrzeń V). Nazywają się one endomorfizmami przestrzeni V .

Rozpatrując endomorfizm $f : V \rightarrow V$ zwykle wybieramy tę samą bazę w obu przestrzeniach V .

2. Definicja. Niech A oznacza bazę przestrzeni liniowej V . Macierzą endomorfizmu $f : V \rightarrow V$ w bazie A nazywamy macierz $M(f)_A := M(f)_A^A$. Inaczej mówiąc, zamiast $M(f)_A^A$ będziemy pisać po prostu $M(f)_A$.

3. Twierdzenie. Niech $f : V \rightarrow V$ oznacza endomorfizm przestrzeni liniowej V i niech A oraz B oznaczają dwie bazy przestrzeni V . Wtedy $M(f)_B = M(\text{id})_A^B \cdot M(f)_A \cdot (M(\text{id})_A^B)^{-1}$.

Dowód wynika z Wniosków 23 i 24 z wykładu 11.

Wektor $v \in V$ i jego obraz $f(v)$ przy endomorfizmie $f : V \rightarrow V$ należą do tej samej przestrzeni i może się zdarzyć, że mają ten sam kierunek (tzn. są proporcjonalne).

4. Przykład. Niech $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$. Macierz f w bazie standardowej jest równa $M(f)_{\text{st}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Postaramy się wyobrazić sobie, jak f przekształca płaszczyznę $\mathbb{R}^2$. Będzie to znacznie łatwiejsze, gdy zauważymy, że macierz f w bazie $W : (2, 3), (1, -1)$, jest równa $M(f)_W = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(tak jest, bo $f(2, 3) = (8, 12) = 4(2, 3)$ oraz $f(1, -1) = (-1, 1) = -(1, -1)$). Oznacza to że przekształcenie f rozciąga cztery razy wektory o kierunku $(2, 3)$ i odwraca (zamienia na przeciwne) wektory o kierunku $(1, -1)$.

5. Uwaga. Macierz endomorfizmu $f : V \rightarrow V$ w bazie $B : w_1, \dots, w_n$ jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy obraz każdego z wektorów tej bazy przy f jest do niego proporcjonalny, dokładniej: $M(f)_B = D(a_1, \dots, a_n) \iff f(w_1) = a_1 w_1, \dots, f(w_n) = a_n w_n$.

Nasuują się pytania, czy dla każdego endomorfizmu f istnieje taka baza W , w której macierz jest diagonalna oraz jak (jeśli istnieje) znaleźć taką bazę W .

6. Definicja. Niech f oznacza dowolny endomorfizm przestrzeni V . Liczba λ nazywa się wartością własną endomorfizmu f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki niezerowy wektor $v \in V$, że $f(v) = \lambda v$.

7. Definicja. Niech f oznacza dowolny endomorfizm przestrzeni V . Niezerowy wektor $v \in V$ nazywa się wektorem własnym endomorfizmu f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}$, że $f(v) = \lambda v$.

8. Przykład. Wektory $(2, 3), (1, -1)$ są wektorami własnymi endomorfizmu z Przykładu 4. Pierwszemu z nich odpowiada wartość własna 4, a drugiemu wartość własna -1 .

9. Twierdzenie. Macierz endomorfizmu $f : V \rightarrow V$ w bazie B jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wektory bazy B są wektorami własnymi endomorfizmu f .

10. Uwaga. Wartościami własnymi macierzy kwadratowej $A \in M(n \times n)$ nazywamy wartości własne przekształcenia $f(v) = Av$, a wektorami własnymi macierzy A nazywamy wektory własne przekształcenia $f(v) = Av$.

11. Przykład. Wektor $(1, 2, 5)$ jest wektorem własnym macierzy $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, bo $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Odpowiada mu wartość własna 5.

12. Twierdzenie. Liczba λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Wielomian $\text{char}(x) = \det(A - xI_n)$ nazywa się wielomianem charakterystycznym macierzy A .
- Dowód. Liczba λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wektor $v \neq 0$, że $(A - \lambda I)v = 0$, to oznacza, że jednorodny układ równań o macierzy współczynników $A - \lambda I$ ma niezerowe rozwiązanie, a to z kolei jest równoważne z warunkiem $r(A - \lambda I) < n$, czyli z warunkiem $\det(A - \lambda I) = 0$.
13. Przykład. Wartościami własnymi macierzy trójkątnej są wyrazy przekątnej głównej (bo wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi wyrazów z przekątnej).
14. Wniosek. Aby znaleźć wektory własne macierzy A , postępujemy tak:
- znajdujemy wielomian charakterystyczny $\text{char}(x) = \det(A - xI)$,
 - znajdujemy wartości własne, tzn. rozwiązujemy równanie $\det(A - xI) = 0$.
 - dla każdej wartości własnej λ rozwiązujemy równanie macierzowe $Av = \lambda v$ lub równoważne z nim równanie $(A - \lambda I)v = 0$. Zbiór rozwiązań tego równania oznaczamy symbolem V_λ i nazywamy przestrzenią własną odpowiadającą wartości własnej λ . Następnie odrzucamy z V_λ wektor zerowy – otrzymujemy w ten sposób zbiór wektorów własnych odpowiadających tej wartości własnej.
15. Przykład. Znajdziemy wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (czyli wartości własne i wektory własne przekształcenia $f(x, y) = (4x + 2y, -x + y)$). Wielomian charakterystyczny jest równy $\text{char}(x) = \det \begin{pmatrix} 4-x & 2 \\ -1 & 1-x \end{pmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Wartości własne, czyli pierwiastki wielomianu charakterystycznego, są zatem równe $\lambda_1 = 2$ oraz $\lambda_2 = 3$. Dla każdej z tych wartości znajdziemy odpowiadające jej wektory własne.
- I. $\lambda_1 = 2$. Wektor v jest wektorem własnym odpowiadającym λ_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $Av = 2v$, czyli $(A - 2I_2)v = 0$, tzn. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tzn. $v = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \neq 0$.
- II. $\lambda_1 = 3$. Wektor v jest wektorem własnym odpowiadającym λ_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $Av = 3v$, czyli $(A - 3I_2)v = 0$, tzn. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tzn. $v = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t \neq 0$.
16. Twierdzenie. a) Jeśli wektory własne $w_1, \dots, w_k$ macierzy A odpowiadają różnym wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ macierzy A , to są liniowo niezależne. b) Jeśli $\lambda, \mu, \dots, \omega$ oznaczają różne wartości własne macierzy A , to ustawiając po kolei wektory baz przestrzeni własnych $V_\lambda, V_\mu, \dots, V_\omega$ otrzymujemy układ liniowo niezależny.
17. Twierdzenie. Endomorfizm $f : V \rightarrow V$ ma w pewnej bazie macierz diagonalną wtedy i tylko wtedy, gdy suma wymiarów przestrzeni własnych jest równa wymiarowi przestrzeni V .
18. Uwaga. Nie dla każdego przekształcenia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ istnieje baza złożona z wektorów własnych.
19. Przykład. Macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (macierz obrotu o kąt prosty) nie ma wcale wektorów własnych, bo jej wielomian charakterystyczny $\text{char}(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$ nie ma pierwiastków.
20. Przykład. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest zadane wzorem $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Jego macierzą jest $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a wielomianem charakterystycznym $\text{char}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$. Wielomian ten ma tylko jeden pierwiastek (czyli wartość własną) $\lambda = 1$. Wektory własne odpowiadające tej wartości własnej, to rozwiązania równania $(A - I)v = 0$, czyli równania $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, czyli wektory postaci $(t, 0)$. Nie rozpinają one całej przestrzeni $\mathbb{R}^2$, więc nie uda się z nich wybrać bazy (jest jedna przestrzeń własna, ale jej wymiar jest mniejszy od wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}^2$). Z drugiej strony, jest też cała klasa macierzy mających dużo wektorów własnych:

21. Twierdzenie. Jeśli macierz $A \in M(n \times n)$ jest macierzą symetryczną (tzn. $A^T = A$), to istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych macierzy A .
22. Definicja. Macierz kwadratowa A nazywa się diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz kwadratowa C , że $A = CDC^{-1}$ dla pewnej macierzy diagonalnej D .
23. Twierdzenie. Macierz kwadratowa A stopnia n jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych macierzy A .
24. Wniosek. Dla macierzy diagonalizowalnej A możemy w prosty sposób obliczyć jej n -tą potęgę: $A^n = (CDC^{-1})(CDC^{-1})\dots(CDC^{-1}) = CD(C^{-1}C)D(C^{-1}\dots C)DC^{-1} = CD^nC^{-1}$.
25. Przykład 15, cd. Obliczymy n -tą potęgę macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Oznaczmy przez $w_1 = (1, -1)$, $w_2 = (2, -1)$ wybraną parę wektorów własnych, po jednym od każdej wartości własnej. Wektory w_1, w_2 są liniowo niezależne, więc tworzą bazę $\mathbb{R}^2$, oznaczmy ją W . Z definicji macierzy przekształcenia wynika, że macierz $M(f)_W$ przekształcenia f w bazie W jest równa $D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ oraz że $C := M(\text{id})_W^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Z Twierdzenia 3 wynika równość $A = M(f)_{\text{st}}^{\text{st}} = M(\text{id})_W^{\text{st}} \cdot M(f)_W \cdot (M(\text{id})_W^{\text{st}})^{-1} = CDC^{-1}$. Teraz możemy łatwo obliczyć wzór na n -tą potęgę macierzy A : $A^n = CD^nC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$.
26. Przykład. W roku 1202 włoski matematyk Leonardo Fibonacci wydał książkę pod tytułem Liber Abaci, w której przedstawił takie oto zadanie. Króliki rozmnażają się w sposób następujący: para młodych (świeżo urodzonych) królików po miesiącu dojrzeje, a po każdym następnym wydaje na świat parę młodych królików. Oblicz liczbę par dojrzałych królików po n miesiącach od dzisiaj, jeśli za miesiąc dostaniemy do hodowli jedną parę młodych królików. Mówiliśmy o tym zadaniu na zajęciach o macierzach. Teraz jesteśmy gotowi, aby je rozwiązać. Niech F_n oznacza liczbę par królików po n miesiącach. Wtedy $F_0 = 0, F_1 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Można zauważyć, że ciąg ten jest związany z macierzą $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, mianowicie, $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ (równość tę można udowodnić przez indukcję). Jeśli wyznaczymy wzór jawny na A^n , to dostaniemy z niego wzór jawny na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego. Wielomian charakterystyczny macierzy jest równy $\text{char}(x) = -x(1-x) - 1 = x^2 - x - 1 = (x-\lambda)(x-\mu)$, gdzie $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, zatem wartościami własnymi są liczby λ, μ . Wektory własne odpowiadające wartości własnej λ są postaci $t(1, \lambda), t \neq 0$, wybieramy z nich wektor $w_1 = (1, \lambda)$. Wektory własne odpowiadające wartości własnej μ są postaci $t(1, \mu), t \neq 0$, wybieramy z nich wektor $w_2 = (1, \mu)$. Układ wektorów w_1, w_2 jest bazą $\mathbb{R}^2$. Oznaczmy tę bazę symbolem W i niech $C = M(\text{id})_W^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$. Wtedy $A = C \cdot D(\lambda, \mu)C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$. Zatem, jak w poprzednim przykładzie, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \mu^{n-1} - \lambda^{n-1} & \mu^n - \lambda^n \\ \mu^n - \lambda^n & \mu^{n+1} - \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$. Wynika stąd, że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu^n - \lambda^n)$ dla $n \geq 0$. Zatem wzór jawny ma postać $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ dla $n \geq 0$.