

1. Przypomnijmy, że bazą przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny taki układ wektorów $v_1, \dots, v_k \in V$, że każdy wektor $w \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów $v_1, \dots, v_k$.

2. Definicja. Niech $A : v_1, \dots, v_k$ oznacza bazę przestrzeni liniowej V i niech $v \in V$ oznacza dowolny wektor. Współczynniki $a_1, \dots, a_k$ kombinacji liniowej $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$ nazywają się współrzędnymi wektora v w bazie A . Liczby te jednoznacznie wyznaczają wektor v . Kolumnę współrzędnych wektora

$$v \text{ w bazie } A \text{ oznaczać będziemy symbolem } v_A, \text{ tzn. } v_A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Szczególnie prosto wygląda kolumna współrzędnych wektora przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w bazie standardowej:

3. Przykład. Każdy wektor $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ można zapisać w postaci $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) +$

$$x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1), \text{ więc } v_{\text{st}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v^T. \text{ Na ogół wektory przestrzeni } \mathbb{R}^n \text{ za-}$$

pisujemy jako wiersze, mamy wtedy wzór $v_{\text{st}} = v^T$, a gdybyśmy zapisywali je jako kolumny, to mielibyśmy wzór $v_{\text{st}} = v$.

4. Zwróćmy uwagę na podobieństwo k -wymiarowej przestrzeni V z wybraną bazą do przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Jeśli zamiast wektorów widzimy ich kolumny współrzędnych, to różnicy nie widać.

Teraz zajmijmy się przekształceniami między przestrzeniami liniowymi.

5. Definicja. Niech V i W oznaczają przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$. Funkcja $f : V \rightarrow W$ nazywa się przekształceniem liniowym (nad $\mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia dwa warunki: $f(v+w) = f(v) + f(w)$ (zachowywanie sumy), $f(av) = af(v)$ (zachowywanie iloczynu przez skalar) dla wszystkich $v, w \in V$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Powyższe dwa warunki można zastąpić jednym $f(av + bw) = af(v) + bf(w)$ i nazwać zachowywaniem kombinacji liniowych.

6. Przykładami przekształceń liniowych są m.in.: a) przekształcenie zerowe $f : V \rightarrow W$ określone wzorem $f(v) = 0$ dla każdego $v \in V$, b) przekształcenie identycznościowe $i : V \rightarrow V$ określone wzorem $i(v) = v$ dla każdego $v \in V$, c) obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o wybrany kąt α wokół 0, d) przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone wzorem $f(x, y) = (y, x)$.

7. Przykład. Przekształcenie $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ określone wzorem $f(w) = w'$ dla $w \in \mathbb{R}[x]$ jest przekształceniem liniowym. Przekształcenie $g : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ określone wzorem $g(w) = w^2$ dla $w \in \mathbb{R}[x]$ nie jest przekształceniem liniowym, bo np. $g(2x) = 4x^2 \neq 2x^2 = 2g(x)$.

8. Przykład. Przekształcenie $f : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone wzorem $f(w) = (w(0), w(1))$ dla $w \in \mathbb{R}[x]_3$ jest przekształceniem liniowym.

9. Definicja. Niech $f : V \rightarrow W$ oznacza przekształcenie liniowe z przestrzeni V w przestrzeń W . Jądrem przekształcenia f nazywamy zbiór $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$. Obrazem przekształcenia f nazywamy zbiór wartości f , czyli zbiór $\text{im } f = \{f(v) : v \in V\}$.

10. Uwaga. Rozpatrzmy dowolną bazę $v_1, \dots, v_k$ przestrzeni V oraz przekształcenie liniowe $f : V \rightarrow W$ w przestrzeń W . Ponieważ każdy wektor v przestrzeni V jest kombinacją liniową wektorów bazy: $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$, a przekształcenie liniowe zachowuje kombinacje liniowe wektorów, to

$f(v) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_k f(v_k)$. Zatem obraz $\text{im} f$ przekształcenia f jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W rozpiętą na obrazach wektorów bazy przestrzeni V .

11. Uwaga. Jądro $\ker f$ przekształcenia f też jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V (ćwiczenie).

12. Twierdzenie. Dla dowolnego przekształcenia liniowego $f : V \rightarrow W$ zachodzi równość:
 $\dim V = \dim \ker f + \dim \text{im} f$.

13. Przykład. Rozpatrzmy przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ określone wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 3x_2 + 3x_3, x_1 + 4x_2 + 5x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

Jądro f jest zbiorem rozwiązań równania $f(v) = 0$, lub w postaci macierzowej $Av = 0$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Z

twierdzenia Kroneckera Capelli'ego wynika, że wymiar jądra, czyli liczba parametrów potrzebnych do opisu rozwiązań, jest równy $\dim V - r(A)$. Z kolei $\dim \text{im} f$ jest wymiarem przestrzeni rozpiętej na kolumnach macierzy A , czyli jest równy $r(A)$. Widzimy więc, że spełniona jest równość z twierdzenia.

Przyjrzyjmy się najpierw przekształceniom liniowym z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$.

14. Przykład. Spróbujmy znaleźć przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, przy którym $f(1, 0) = (2, 4, -5)$, $f(0, 1) = (7, 3, 1)$. Zauważmy, że z podanych warunków wynika, że $f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = x(2, 4, -5) + y(7, 3, 1) = (2x + 7y, 4x + 3y, -5x + y)$. Jeśli wektory zapiszemy w kolumnach, to powyższy wzór przyjmuje postać $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Zatem f

jest po prostu mnożeniem wektora przez macierz, w której kolumnach stoją obrazy wektorów bazy standardowej przy f . Z własności działań na macierzach wynika, że otrzymane przekształcenie jest przekształceniem liniowym.

15. Twierdzenie. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oznacza dowolne przekształcenie liniowe. Wtedy f jest postaci $f(v) = Av$, gdzie macierz $A \in M(m \times n)$ ma jako swoje kolumny wektory $f(e_1), \dots, f(e_n)$. (Tu wektory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ traktujemy jako kolumny)

16. Przykład. Obrót $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ płaszczyzny o kąt $\frac{\pi}{6}$ wokół punktu $(0, 0)$ można zapisać w postaci

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Zajmijmy się teraz przekształceniami liniowymi między dowolnymi przestrzeniami liniowymi.

17. Przykład. Niech układ $A : v_1, v_2, v_3$ oznacza wybraną bazę przestrzeni liniowej V , a układ $B : w_1, w_2$ oznacza wybraną bazę przestrzeni liniowej W . Spróbujmy znaleźć przekształcenie liniowe $f : V \rightarrow W$, przy którym $f(v_1) = 3w_1 - w_2$, $f(v_2) = w_1$, $f(v_3) = -w_1 - 2w_2$. Zapiszmy dowolny wektor $v \in V$ jako $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Z podanych warunków wynika, że wtedy $f(v) = f(xv_1 + yv_2 + zv_3) = xf(v_1) + yf(v_2) + zf(v_3) = x(3w_1 - w_2) + yw_1 + z(-w_1 - 2w_2) = (3x + y - z)w_1 + (-x - 2z)w_2$. Zatem $f(v)_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} v_A$. Zatem kolumnę współrzędnych wektora $f(v)$ znajdujemy mnożąc kolumnę współrzędnych wektora v w bazie A z lewej strony przez macierz, w której kolumnach stoją współrzędne obrazów wektorów bazy A przy f w bazie B .

18. Definicja macierzy przekształcenia liniowego w bazaach. Jeśli $A : v_1, \dots, v_n$ jest bazą przestrzeni liniowej V , $B : w_1, \dots, w_m$ bazą przestrzeni W , a $f : V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym, to macierzą prze-

kształcenia f w bazach A, B nazywamy macierz $M(f)_A^B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, gdzie $f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$, $f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m$, ..., $f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$. W kolejnych kolumnach tej macierzy stoją współrzędne w bazie B obrazów kolejnych wektorów bazy A przy przekształceniu f (w i -tej kolumnie stoją współrzędne wektora $f(v_i)$ w bazie B).

19. Przykład. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone jest wzorem $f(x, y, z) = (2x - y + z, x - 2z)$. Jego macierz w bazach standardowych jest równa $M(f)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Macierz w bazach $A : v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, 5, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $B : w_1 = (1, 1), w_2 = (0, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ obliczamy z definicji: $f(v_1) = (0, -2) = 0(1, 1) - 2(0, 1)$, zatem pierwsza kolumna jest równa $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Podobnie, $f(v_2) = (3, -1) = 3(1, 1) - 4(0, 1)$, zatem druga kolumna jest równa $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; $f(v_3) = (0, 0) = 0(1, 1) + 0(0, 1)$, zatem trzecia kolumna jest równa $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zatem $M(f)_A^B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.
20. Twierdzenie (druga charakteryzacja macierzy przekształcenia w bazach). Dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi równość $f(v)_B = M(f)_A^B \cdot v_A$.
- Dowód zostawiam jako ćwiczenie w dwóch krokach: 1. sprawdzenie równości dla wektorów bazy A ; 2. wykazanie, że jeśli równość zachodzi dla wektorów bazy A , to zachodzi dla ich kombinacji liniowych. Twierdzenie to daje nową charakteryzację macierzy przekształcenia: jest to ta macierz, przez którą należy pomnożyć kolumnę współrzędnych wektora v w bazie A , żeby dostać kolumnę współrzędnych wektora $f(v)$ w bazie B . Innymi słowy, jeśli wektory w przestrzeniach V, W utożsamimy z kolumnami ich współrzędnych w bazach A przestrzeni V i B przestrzeni W , to przekształcenie liniowe $f : V \rightarrow W$ polega na mnożeniu wektora przez macierz $M(f)_A^B$.
21. Przykład. Rozpatrzmy przekształcenie $\text{id} : V \rightarrow V$ dowolnej przestrzeni liniowej V w siebie, określone wzorem $f(v) = v$ oraz dwie bazy A i B przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wtedy $v_B = M(\text{id})_A^B v_A$. Wzór ten pozwala znajdować współrzędne wektorów w bazie B , gdy znamy ich współrzędne w bazie A .
- Okazuje się, że złożeniu przekształceń odpowiada iloczyn macierzy. Dokładniej:
22. Twierdzenie. Jeśli dane są przestrzenie liniowe: V z bazą A , W z bazą B i Z z bazą C oraz przekształcenia liniowe $f : V \rightarrow W$ oraz $g : W \rightarrow Z$, to zachodzi równość $M(g \circ f)_A^C = M(g)_B^C \cdot M(f)_A^B$.
23. Wniosek. Jeśli A jest bazą V , B bazą W , a przekształcenie $f : V \rightarrow W$ posiada przekształcenie odwrotne f^{-1} , to $f^{-1} \circ f = \text{id}$, więc $M(f^{-1})_B^A \cdot M(f)_A^B = M(\text{id})_A^A = I$, zatem $M(f^{-1})_B^A = (M(f)_A^B)^{-1}$.
24. Wniosek. Jeśli A, C są bazami przestrzeni liniowej V , B, D są bazami przestrzeni liniowej W , a $f : V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, to $M(f)_C^D = M(\text{id})_B^D \cdot M(f)_A^B \cdot M(\text{id})_C^A$.
25. Dla przekształcenia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ z Przykładu 19 określonego wzorem $f(x, y, z) = (2x - y + z, x - 2z)$ oraz baz $A : v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, 5, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $B : w_1 = (1, 1), w_2 = (0, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ mamy $M(f)_A^B = M(\text{id})_{\text{st}}^B \cdot M(f)_{\text{st}}^{\text{st}} \cdot M(\text{id})_A^{\text{st}} = (M(\text{id})_{\text{st}}^B)^{-1} \cdot M(f)_{\text{st}}^{\text{st}} \cdot M(\text{id})_A^{\text{st}} =$
- $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
- $$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$