

1. Definicja. Niech A oznacza macierz kwadratową stopnia n . Wyznacznikiem macierzy A nazywamy liczbę $\det(A) = |A|$ określoną w sposób następujący:
 1. Jeśli $n = 1$, $A = (a_{11})$, to $\det(A) = a_{11}$.
 2. Jeśli $n \geq 2$, to $\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13}) - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$, gdzie A_{1j} oznacza macierz powstałą z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j -ej kolumny.
2. Przykład. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
3. Przykład. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - dbi - ahf$.
4. Metoda Sarrusa obliczania wyznacznika macierzy stopnia 3. Powyższy przykład można zapamiętać w sposób następujący: do A dopisujemy z prawej strony jej pierwszą i drugą kolumnę, a następnie obliczamy sumę iloczynów wyrazów na opadających liniach i odejmujemy sumę iloczynów wyrazów na liniach wznoszących się. Zamiast dopisywać kolumny, można dopisać dwa pierwsze wiersze u dołu.
5. Przykład. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -23$.
6. Przykład. $\det(D(a_1, a_2, \dots, a_n)) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$, w szczególności $\det(I_n) = 1$.
7. Twierdzenie. Własności wyznacznika. Dla dowolnej kwadratowej macierzy A stopnia n :
 - (a) Rozwinięcie Laplace'a wzdłuż dowolnego wiersza: $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$, gdzie A_{kj} oznacza macierz powstałą z macierzy A przez skreślenie k -ego wiersza i j -ej kolumny.
 - (b) Jeśli macierz A' powstała z macierzy A przez pomnożenie jednego z wierszy przez liczbę a , to $\det(A') = a \det(A)$.
 - (c) Jeśli macierz A' powstała z macierzy A przez zamianę dwóch wierszy, to $\det(A') = -\det(A)$.
 - (d) Jeśli macierz A' powstała z macierzy A przez dodanie jednego wiersza pomnożonego przez liczbę do innego wiersza, to $\det(A') = \det(A)$.
 - (e) $\det(A^T) = \det(A)$.
 - (f) Wyznacznik macierzy trójkątnej (dolnej lub górnej) jest równy iloczynowi jej wyrazów stojących na przekątnej głównej.
 - (g) (twierdzenie Cauchy'ego) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
 - (h) $\det(A) \neq 0 \iff A$ jest nieosobliwa $\iff r(A) = n \iff A^{-1}$ istnieje. Wtedy $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.
 - (i) $\det(A) = 0 \iff$ wiersze macierzy A tworzą układ liniowo zależny (tzn. jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych).
8. Uwaga. Z własności e) wynika, że rozwinięcie Laplace'a można wykonywać wzdłuż dowolnej kolumny. Również własności b), c) i d) mają swoje odpowiedniki dla kolumn.
9. Przykład. Obliczmy wyznaczniki:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{roz. L. wzd. I kol.}}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{roz. L. wzd. III w.}}{=} -6 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} -6(-23) = 138,$$

15. Przykład. Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + 4y + 3z = 20, \\ -3x + 4y + 2z = 9. \end{cases}$ Zauważmy, że w układzie jest

tyle samo równań, co niewiadomych, można więc obliczyć wyznacznik macierzy współczynników, czyli tzw. wyznacznik główny: $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 19$. Ponieważ $\det(A) \neq 0$, można skorzy-

stać ze wzorów Cramera. Obliczamy wyznaczniki macierzy A_1, A_2, A_3 : $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 20 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$

57, $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 20 & 3 \\ -3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 95$, $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 20 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -19$. Wyznaczamy wartości niewiadomych $x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 3$, $y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 5$, $z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -1$. Zatem jedyne rozwiązanie, to $(3, 5, -1)$.

16. Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 2y + (2-a)z = 1, \\ x + 2z = a, \\ x + 2ay - z = 6 \end{cases}$ w zależności od wartości parametru a .

a. Ponieważ liczba równań jest równa liczbie niewiadomych, to w przypadku, gdy macierz współczynników będzie nieosobliwa, będzie można użyć wzorów Cramera. $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2-a \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2a & -1 \end{vmatrix} =$

$-2a^2 + 4a + 6 = -2(a-3)(a+1)$. Rozpatrzmy kolejno trzy przypadki.

I. $a \neq 3, a \neq -1$, wtedy układ ma jedno rozwiązanie, znajdziemy je ze wzorów Cramera: $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2-a \\ a & 0 & 2 \\ 6 & 2a & -1 \end{vmatrix} = -2a^3 + 4a^2 - 2a + 24 = -2(a-3)(a^2 + a + 4)$, $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2-a \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} =$

$a^2 - 8a + 15 = (a-3)(a-5)$, $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 2a & 6 \end{vmatrix} = 4a - 12 = 4(a-3)$. Zatem $x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} =$

$\frac{a^2+a+4}{a+1}$, $y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{a-5}{-2(a+1)}$, $z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-2}{a+1}$, a więc gdy $a \neq 3, a \neq -1$, to jedynym rozwiązaniem jest wektor $(\frac{a^2+a+4}{a+1}, \frac{a-5}{-2(a+1)}, \frac{-2}{a+1}) = \frac{1}{2(a+1)}(2a^2 + 2a + 8, 5 - a, -4)$.

II. $a = -1$. Wtedy $\det(A) = 0$ i $\det(A_1) = 32 \neq 0$, zatem układ jest sprzeczny.

III. $a = 3$. W tym przypadku wszystkie wyznaczniki się zerują, więc twierdzenie daje nam tylko

informację, że układ nie jest oznaczony. Układ ma postać $\begin{cases} 2y - z = 1, \\ x + 2z = 3, \\ x + 6y - z = 6. \end{cases}$ Rozwiązując

go stwierdzamy, że jest nieoznaczony i jego rozwiązaniem ogólnym jest $(3 - 2z, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z, z), z \in \mathbb{R}$.

17. Przykład. Określimy, ile ma rozwiązań układ $\begin{cases} (a+1)x - 2y + (a-1)z = 1, \\ 6x + (a-6)y + 2z = a, \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$ w za-

leżności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$. Macierz rozszerzona układu jest równa

$\begin{pmatrix} a+1 & -2 & a-1 & 1 \\ 6 & a-6 & 2 & a \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Obliczamy wyznacznik macierzy współczynników

$\det(A) = \begin{vmatrix} a+1 & -2 & a-1 \\ 6 & a-6 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2a^2 + 8a - 8 = -2(a-2)^2$. Z twierdzenia Cramera wynika, że

dla $a \neq 2$ układ jest oznaczony (ma jedno rozwiązanie). Dla $a = 2$ układ ma macierz rozszerzoną

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)w_1 + w_2 \\ (-1)w_1 + w_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i widać, że ma nieskończenie wiele rozwiązań.}$$

Wracamy do przestrzeni liniowych.

18. Definicja. Niech dana będzie przestrzeń liniowa V . Układ wektorów $v_1, \dots, v_k \in V$ nazywa się bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy jest liniowo niezależny oraz rozpina V .
19. Przykład. Układ wektorów st: $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Układ ten rozpina $\mathbb{R}^3$, bo każdy wektor (a, b, c) można zapisać jako $(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$. Układ ten jest liniowo niezależny, bo wektor $0 = (0, 0, 0)$ można zapisać jako kombinację liniową wektorów e_1, e_2, e_3 jedynie tak $(0, 0, 0) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$. Układ st nazywa się bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Analogicznie określa się bazę standardową w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla dowolnej liczby naturalnej n .
20. Twierdzenie. a) Liczba wektorów dowolnej bazy przestrzeni V nie zależy od wyboru bazy. b) Każdy liniowo niezależny układ wektorów przestrzeni V można dopełnić do bazy V .
21. Definicja. Liczba wektorów dowolnej bazy przestrzeni V nazywa się wymiarem przestrzeni V i jest oznaczana symbolem $\dim V$.
22. Uwaga (dodatek do definicji bazy). Za bazę przestrzeni zerowej (złożonej jedynie z wektora zerowego) uważa się zbiór pusty. Zatem $\dim\{0\} = 0$.
23. Przykład. $\dim \mathbb{R}^n = n$ (układ st: $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ jest bazą).
24. Twierdzenie (własności bazy). Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V . Wtedy następujące warunki są równoważne:
 - a) układ $v_1, \dots, v_k$ jest bazą V ,
 - b) układ $v_1, \dots, v_k$ jest liniowo niezależny oraz $k = \dim V$,
 - c) układ $v_1, \dots, v_k$ rozpina V oraz $k = \dim V$.
 - d) każdy wektor $w \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów $v_1, \dots, v_k$.
25. Przykład. $\dim \mathbb{R}[x]_3 = 4$, bo każdy wielomian stopnia nie większego od 3 można jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ wielomianów $1, x, x^2, x^3$. Podobnie, $\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$.
26. Przykład. Zbiór rozwiązań równania $x + 2y + 3z = 0$ jest podprzestrzenią wymiaru 2, bo jak zauważyliśmy poprzednio, każde rozwiązanie można jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej dwóch rozwiązań $(-2, 1, 0)$ i $(-3, 0, 1)$.
27. Przykład. Niech dane będą wektory $v_1, \dots, v_k$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Bazę podprzestrzeni $W = \text{lin}(v_1, \dots, v_k)$ można uzyskać ustawiając te wektory jako wiersze macierzy, następnie sprowadzając tę macierz do postaci schodkowej. Niezerowe wiersze macierzy schodkowej są liniowo niezależne i rozpinają W , więc tworzą bazę W .
28. Przykład. Wymiar przestrzeni macierzy $M(m \times n)$ jest równy mn , bo każda macierz jednoznacznie zapisuje się jako kombinacja liniowa macierzy z jedną jedynką i zerami na pozostałych miejscach.
29. Przykład. Zbiór rozwiązań układu równań liniowych jednorodnych zmiennych $x_1, \dots, x_n$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jak wynika z twierdzenia Kroneckera-Capelli'ego, przestrzeń ta ma wymiar $n - r(A)$, gdzie A oznacza macierz współczynników tego układu.