

1. Definicja. Dwa układy równań nazywają się równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same zbiory rozwiązań.
2. Przypomnijmy, że wcześniej wprowadziliśmy trzy rodzaje operacji elementarnych na wierszach macierzy: I. pomnożenie wybranego wiersza przez liczbę różną od zera. II. zamiana dwóch wierszy miejscami. III. dodanie jednego wiersza pomnożonego przez liczbę do innego wiersza.
3. Twierdzenie. Operacje elementarne zastosowane do macierzy rozszerzonej układu równań liniowych prowadzą do macierzy układu równoważnego z układem danym (czyli mającego te same rozwiązania).
4. Uwaga. Na kolejnym stosowaniu operacji elementarnych polega następująca **metoda eliminacji Gaussa**.

1. Wybieramy jedną z kolumn odpowiadających zmiennym, a w niej niezerowy wyraz i wiersz, w którym on leży.
 2. Przy pomocy operacji I doprowadzamy do tego, że wybrany wyraz jest równy 1.
 3. W pozostałych wierszach przy pomocy operacji III uzyskujemy zera w wybranej kolumnie (eliminujemy wybraną zmienną z pozostałych równań).
 4. Wybieramy nową (jedną spośród jeszcze niewybranych) kolumnę odpowiadającą nowej zmiennej i w niej niezerowy wyraz leżący w nie wybranym jeszcze wierszu.
 5. Przy pomocy operacji I doprowadzamy do tego, że wybrany wyraz jest równy 1.
 6. We wszystkich oprócz ostatnio wybranego wierszach przy pomocy operacji III uzyskujemy zera w wybranej kolumnie.
 7. Jeśli istnieją jeszcze niewybrane kolumny odpowiadające zmiennym, zawierające niezerowe wyrazy w jeszcze niewybranych wierszach, to wracamy do punktu 5.
 8. Jeśli wśród niewybranych wierszy jest wiersz postaci $0 = b$, i $b \neq 0$, to układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny). Jeśli takiego wiersza nie ma, przenosimy niewybrane zmienne na prawą stronę i traktujemy jako parametry, po czym z otrzymanego układu równań odczytujemy rozwiązanie.
5. Przykład. Rozwiążemy kilka układów równań liniowych.

$$a) \begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ x + y + z = 1, \\ 2x - 3y + 5z = 10, \\ 5x - 6y + 8z = 19. \end{cases} \quad \text{Macierzą rozszerzoną jest } [A, B] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 10 \\ 5 & -6 & 8 & 19 \end{pmatrix}. \text{ Wybiera-}$$

my wyraz w pierwszej kolumnie i pierwszym wierszu, następnie wykonujemy kolejne kroki algorytmu

$$\text{eliminacji niewiadomych (wybrane wyrazy będą podkreślone): } \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 10 \\ 5 & -6 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)w_1 + w_2 \\ (-2)w_1 + w_3 \\ (-5)w_1 + w_4 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} w_2/3 \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2w_2 + w_1 \\ (-1)w_2 + w_3 \\ (-4)w_2 + w_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)w_3 + w_1 \\ w_3/3 \\ w_4/3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)w_3 + w_1 \\ (-1)w_3 + w_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Ponieważ nie ma już niezerowych wyrazów}$$

możliwych do wybrania, zapisujemy układ w postaci równań (przy czym pomijamy ostatnie rów-

$$\text{nanie } 0=0). \text{ Otrzymujemy } \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = 1. \end{cases} \quad \text{Zatem jedynym rozwiązaniem jest wektor } (1, -1, 1). \text{ Dany}$$

układ jest więc oznaczony.

$$b) \begin{cases} x - y + z - 2s + t = 9, \\ 2x + 4y - z + s + 3t = 1, \\ x + 2y + 4z + 2t = 1. \end{cases} \text{ Macierzą rozszerzoną jest } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stosujemy eliminację Gaussa: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2w_2 + w_1} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 & 0 & 7 & 11 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-5)w_3 + w_1 \\ (-2)w_3 + w_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -21 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_1/(-3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)w_1 + w_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -10 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$ Wracamy do postaci z

$$\text{równaniami i otrzymujemy układ } \begin{cases} y + 7z + t = -2, \\ -9z + s - t = -1, \\ x - 10z = 5, \end{cases} \text{ z którego wyznaczamy}$$

wartości "podkreślonych" zmiennych: $y = -7z - t - 2, s = 9z + t - 1, x = 10z + 5$. Zatem rozwiązaniem jest każdy wektor postaci $(10z + 5, -7z - t - 2, z, 9z + t - 1, t)$, w którym liczby z, t są dowolne (jest to tzw. rozwiązanie ogólne). Rozwiązań jest nieskończenie wiele, a do ich opisu potrzeba dwóch parametrów. Dany układ jest nieoznaczony. Rozwiązania szczególne otrzymujemy wstawiając za parametry z, t dowolne liczby. Na przykład, gdy wstawimy $z = 1, t = 0$ otrzymujemy rozwiązanie $(15, -9, 1, 8, 0)$, a gdy wstawimy $z = 0, t = 1$ otrzymujemy rozwiązanie $(5, -3, 0, 0, 1)$.

$$c) \begin{cases} x + 2y + z + t = 7, \\ 2x - y - z + 4t = 2, \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1. \end{cases} \text{ Macierzą rozszerzoną jest } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$
 Stosujemy

$$\text{eliminację Gaussa: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} w_1 + w_2 \\ (-2)w_1 + w_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)w_2 + w_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{pmatrix}.$$

Przerywamy operacje, bo ostatni wiersz odpowiada równaniu sprzecznemu $0 = -22$. Zatem dany układ jest sprzeczny, tzn. nie ma rozwiązań.

6. Twierdzenie Kroneckera-Capelli'ego. Rozpatrzmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi i jego postać macierzową $AX = B$. Jeśli $r([A, B]) > r(A)$, to układ ten jest sprzeczny. Jeśli $r([A, B]) = r(A)$, to układ ma rozwiązanie ogólne zależące od $n - r(A)$ parametrów.

Idea dowodu. Przypomnijmy, że rząd macierzy jest równy liczbie schodków w jej postaci schodkowej. Zauważmy, że gdy doprowadzimy do postaci schodkowej macierz rozszerzoną, a następnie usuniemy ostatnią kolumnę, to otrzymamy postać schodkową macierzy współczynników. Zatem, jeśli $r([A, B]) > r(A)$, to znaczy, że postaci schodkowe macierzy $[A, B]$ i A różnią się liczbą schodków i że postać schodkowa macierzy $[A, B]$ ma ostatni schodek w ostatniej kolumnie. Z tego wynika, że układ równań jest sprzeczny (równanie odpowiadające wierszowi ze schodkiem jest sprzeczne). Jeśli $r([A, B]) = r(A)$, to schodka w ostatniej kolumnie nie ma i układ ma rozwiązania zależące od $n - r(A)$ parametrów, bo tylu potrzeba, aby wyznaczyć wartości $r(A)$ zmiennych odpowiadających schodkom.

7. Symbolem $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich ciągów n -elementowych o wyrazach rzeczywistych. Zbiór ten nazywamy przestrzenią $\mathbb{R}^n$, a jego elementy – wektorami. Wektory można dodawać i mnożyć przez liczby (skalary). Wektor $(0, 0, \dots, 0)$ oznaczamy po prostu przez 0 i nazywamy wektorem zerowym.
8. Podobnie, można dodawać i mnożyć przez liczby macierze ustalonego rozmiaru $m \times n$. Dodawać i mnożyć przez liczby można też wielomiany, a także różne funkcje.

9. Wprowadzimy teraz pojęcie, którego przykładami szczególnymi są podane powyżej przykłady.
10. Definicja. Przestrzenią liniową (nad $\mathbb{R}$) nazywamy dowolny zbiór V z określonym dodawaniem (tzn. dla każdych dwóch elementów v, w zbioru V określony jest element $v + w \in V$ nazywany ich sumą) i mnożeniem przez liczby rzeczywiste (tzn. dla każdego elementu $v \in V$ i dowolnej liczby rzeczywistej a określony jest element $av \in V$), jeśli spełnione są warunki:
- a) dodawanie jest przemienne, tzn. $v + w = w + v$ dla dowolnych $v, w \in V$,
 - b) dodawanie jest łączne, tzn. $(v + w) + z = v + (w + z)$ dla dowolnych $v, w, z \in V$,
 - c) istnieje element zerowy $0 \in V$ taki, że $v + 0 = 0 + v = v$ dla dowolnego $v \in V$,
 - d) każdy element $v \in V$ posiada element przeciwny, tzn. dla każdego elementu $v \in V$ istnieje taki element $v' \in V$, że $v' + v = 0$,
 - e) mnożenie jest rozdzielne względem dodawania elementów V , tzn. $a(v + w) = av + aw$ dla dowolnych $v, w \in V$ oraz $a \in \mathbb{R}$,
 - f) mnożenie jest rozdzielne względem dodawania liczb, tzn. $(a + b)v = av + bv$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dowolnego elementu $v \in V$,
 - g) zachodzi łączność mnożenia przez liczby: $a(bv) = (ab)v$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dowolnego elementu $v \in V$,
 - h) zachodzi równość $1v = v$ dla dowolnego elementu $v \in V$.

Elementy zbioru V nazywamy wektorami (przestrzeni V), a liczby rzeczywiste – skalarami. Przestrzenie liniowe nazywa się także przestrzeniami wektorowymi.

11. Przykład. Zbiór $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ze zwykłym dodawaniem wektorów i mnożeniem ich przez liczby jest przestrzenią liniową.
12. Przykład. Zbiór $M(m \times n)$ macierzy ze zwykłym dodawaniem macierzy i mnożeniem ich przez liczby jest przestrzenią liniową.
13. Przykład. Niech k oznacza liczbę naturalną. Zbiór $\mathbb{R}[x]_k$ wielomianów stopni $\leq k$ zmiennej x jest przestrzenią liniową ze względu na naturalne dodawanie wielomianów i mnożenie ich przez liczby.
14. Przykład. Niech $I \subset \mathbb{R}$ oznacza dowolny przedział. Zbiór $C(I)$ funkcji ciągłych na przedziale I jest przestrzenią liniową ze względu na naturalne dodawanie funkcji i mnożenie ich przez liczby.
15. Definicja. Niech $a_1, \dots, a_k$ będą liczbami rzeczywistymi, a $v_1, \dots, v_k$ wektorami przestrzeni V . Sumę $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = \sum_{j=1}^k a_jv_j$ nazywamy kombinacją liniową wektorów $v_1, \dots, v_k$ ze współczynnikami $a_1, \dots, a_k$.
16. Przykład. Wielomian $7x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 10 \in \mathbb{R}[x]_4$ jest kombinacją liniową wielomianów $x^4, x^3, x^2, x, 1$ o współczynnikach 7, 5, 2, 0, 10; jest też kombinacją liniową wielomianów $x^4 + x^2, x^3 - x^2 + x, x - 2$ o współczynnikach 7, 5, -5.
17. Przykład. Zbadamy, które z wektorów: $u_1 = (0, 0, 0), u_2 = (1, 3, 5), u_3 = (1, -3, 5)$ są kombinacjami liniowymi wektorów $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3)$. Wektor u_1 oczywiście jest kombinacją liniową, ze współczynnikami równymi 0. Wektor u_2 jest kombinacją liniową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $(1, 3, 5) = a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3)$, tzn. spełnione są równości $a + b = 1, a + 2b = 3, a + 3b = 5$. Bez trudu sprawdzamy, że liczby $a = -1, b = 2$ spełniają te warunki, zatem wektor u_2 jest kombinacją liniową wektorów v_1, v_2 o współczynnikach -1, 2. Dla wektora $u_3 = (1, -3, 5)$ otrzymujemy w analogiczny sposób równania $a + b = 1, a + 2b = -3, a + 3b = 5$, które tworzą układ sprzeczny. Zatem wektor u_3 nie jest kombinacją liniową wektorów v_1, v_2 .
18. Definicja. Układ $v_1, \dots, v_k$ wektorów przestrzeni V nazywa się liniowo zależny, jeśli wektor zerowy da się przedstawić jako kombinację liniową $a_1v_1 + \dots + a_kv_k$, w której nie wszystkie współczynniki a_i są zerowe.

19. Definicja. Układ $v_1, \dots, v_k$ wektorów przestrzeni V nazywa się liniowo niezależny, jeśli wektor zerowy da się przedstawić jako kombinację liniową wektorów $v_1, \dots, v_k$ jedynie ze wszystkimi współczynnikami równymi 0.
20. Przykład. Układ wektorów $(1, 1), (1, 3), (2, 3)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ jest liniowo zależny, bo zachodzi równość $(0, 0) = 3(1, 1) + (1, 3) - 2(2, 3)$, w której współczynniki nie są zerami.
21. Definicja. Niech V oznacza dowolną przestrzeń liniową. Podzbiór $W \subset V$ nazywa się podprzestrzenią liniową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych dwóch wektorów z W należy do W oraz iloczyn dowolnego wektora z W przez dowolną liczbę należy do W . Jeśli te warunki są spełnione, to zbiór W też można w naturalny sposób traktować jako przestrzeń liniową.
22. Przykład. Podzbiór $\mathbb{R}[x]_1$ (złożony z wielomianów liniowych) przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ (złożonej z wielomianów stopni nie większych od 3) jest jej podprzestrzenią liniową, bo suma dowolnych dwóch wielomianów liniowych jest wielomianem liniowym oraz iloczyn wielomianu liniowego przez skalar jest wielomianem liniowym.
23. Przykład. Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych n zmiennych jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (układ jest jednorodny, gdy wszystkie wyrazy wolne są zerami).
24. Przykład – definicja. Niech dany będzie dowolny układ $v_1, \dots, v_k$ wektorów przestrzeni V . Wtedy zbiór $\text{lin}(v_1, \dots, v_k)$ wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, \dots, v_k$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Nazywa się ona przestrzenią rozpiętą na wektorach $v_1, \dots, v_k$, a o układzie wektorów $v_1, \dots, v_k$ mówimy, że rozpina tę przestrzeń.
25. Twierdzenie. Jeśli układ $w_1, w_2, \dots, w_k$ wektorów przestrzeni V powstał z układu $v_1, v_2, \dots, v_k$ przez stosowanie operacji elementarnych na wektorach, to:
- $\text{lin}(w_1, \dots, w_k) = \text{lin}(v_1, \dots, v_k)$.
 - układ $w_1, w_2, \dots, w_k$ jest liniowo zależny $\iff$ układ $v_1, v_2, \dots, v_k$ jest liniowo zależny.
26. Przykład. Rozpatrzmy zbiór V rozwiązań równania $x + 2y + 3z = 0$. Jest to podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Zauważmy, że rozwiązania danego równania są postaci $(-2y - 3z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$ i że można je zapisać w postaci $(-2y - 3z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$. Wynika z tego, że podprzestrzeń V jest rozpięta przez układ wektorów $(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)$, tzn. $V = \text{lin}((-2, 1, 0), (-3, 0, 1))$.