

1. Niech m, n oznaczają liczby naturalne. Macierz $m \times n$ nazywamy prostokątną tablicę o m wierszach i n kolumnach wypełnioną liczbami rzeczywistymi. Zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ oznaczać będziemy symbolem $M(m \times n)$. Liczby stojące w macierzy nazywamy jej wyrazami. Wyrazy oznaczamy symbolami z dwoma indeksami u dołu, pierwszy to numer wiersza, a drugi to numer kolumny.
2. Przykład. Jeśli $A = \begin{pmatrix} 2 & e & -5 \\ 0 & 13 & \pi \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in M(2 \times 3)$, to $a_{13} = -5, a_{21} = 0$.
3. Przykład. Macierze o jednym wierszu nazywamy wektorami-wierszami, a macierze o jednej kolumnie wektorami-kolumnami.
4. Macierze tych samych rozmiarów można dodawać. Dokładniej: niech $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(m \times n)$ (tzn. A, B mają po m wierszy i po n kolumn), to ich sumą nazywamy macierz $A + B = (c_{ij}) \in M(m \times n)$ określoną wzorem $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dla $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Innymi słowy, dodaje się wyrazy stojące na odpowiednich miejscach.
5. Przykład. $\begin{pmatrix} 2 & e & -5 \\ 0 & 13 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & e-1 & -5 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Macierze można też mnożyć przez liczby: jeśli $k \in \mathbb{R}$ jest liczbą, a $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ dowolną macierzą, to macierz $kA = (c_{ij})$ jest określona wzorem $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$ dla $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.
7. Przykład. Jeśli $A = \begin{pmatrix} 2 & e & -5 \\ 0 & 13 & \pi \end{pmatrix}$, to $(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 & -2 \cdot e & -2 \cdot (-5) \\ -2 \cdot 0 & -2 \cdot 13 & -2 \cdot \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2e & 10 \\ 0 & -26 & -2\pi \end{pmatrix}$.
8. Definicja. Macierz $O \in M(m \times n)$, której każdy wyraz jest równy 0, nazywa się macierzą zerową.
9. Twierdzenie. Własności dodawania macierzy i mnożenia przez skalary. Ustalmy liczby naturalne m, n . Niech $A, B, C \in M(m \times n)$ będą dowolnymi macierzami, a a, b dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy: a) $A + B = B + A$, b) $(A + B) + C = A + (B + C)$, c) $A + O = A$, $A + (-1)A = O$, $a(A + B) = aA + aB$, d) $(a + b)A = aA + bA$, e) $(ab)A = a(bA)$, f) $1A = A$. Własności te oznaczają, że zbiór macierzy $M(m \times n)$ jest tzw. przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.
10. Definicja. Macierz o n wierszach i n kolumnach nazywa się macierzą kwadratową stopnia n .
11. Definicja. Macierz kwadratowa $A = (a_{ij})$ nazywa się diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Macierz diagonalną o wyrazach $d_1, \dots, d_n$ na przekątnej będziemy oznaczać $D(d_1, \dots, d_n)$.
12. Przykład. Macierz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D(2, 0)$ jest diagonalna, a macierz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nie jest diagonalna.
13. Definicja. Macierz $I_n = D(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n)$ nazywa się macierzą jednostkową stopnia n . Jest to macierz diagonalna z jedynekami na przekątnej głównej.
14. Macierz $A \in M(n \times n)$ nazywa się macierzą trójkątną górną, jeśli poniżej przekątnej głównej stoją same zera (tzn. $a_{ij} = 0$ dla $i > j$). Podobnie definiuje się macierze trójkątne dolne.
15. Przykład. Macierz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ jest macierzą trójkątną górną, a $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ jest macierzą trójkątną dolną.

16. Definicja. Niech $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n)$ będzie dowolną macierzą o n

kolumnach, a $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ dowolnym wektorem-kolumną o n wyrazach. Wtedy określamy iloczyn Av

wzorem $Av = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n \\ \dots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}$. Jest to wektor-kolumna o m wyrazach.

17. Przykład. Pewien rolnik miał jabłka gatunków: antonówka, bojken, czempjon. Co sobotę notował, ile kilogramów jabłek każdego gatunku sprzedawał na targu. Zapisywał te liczby w wierszach tabelki:

$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 \\ 30 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 50 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Po pewnym czasie postanowił sprawdzić, ile pieniędzy dostawał łącznie za sprze-

dane jabłka. Napisał ich ceny w kolumnie po prawej stronie tablicy, a obok w drugiej kolumnie sumy przywiezione do domu w kolejne soboty. Otrzymał następujący zapis, wymyślając mnożenie macierzy

przez wektor-kolumnę (być może przed nim zrobił to ktoś inny): $\begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 \\ 30 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 50 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 170 \\ 220 \\ \dots \end{pmatrix}$.

Kiedys żona zapytała rolnika, ile by przywoził, gdyby sprzedawał swoje jabłka o złotówkę drożej. On dopisał z boku nowe ceny i (wymyślając mnożenie macierzy przez macierz) uzyskał zapis:

$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 \\ 30 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 50 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 & 205 \\ 170 & 250 \\ 220 & 320 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$.

18. Definicja. Niech $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ będzie macierzą o m wierszach i n kolumnach, a $B = (b_{kr}) \in M(n \times p)$ macierzą o n wierszach i p kolumnach. Wtedy określamy macierz $A \cdot B$ o m wierszach i p kolumnach wzorem: $A \cdot B = (c_{ir})$, gdzie $c_{ir} = a_{i1}b_{1r} + a_{i2}b_{2r} + \dots + a_{in}b_{nr} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jr}$. Można to opisać tak: mnożymy macierz A przez kolejne kolumny macierzy B i powstałe w wyniku tych mnożeń kolumny ustawiamy jedną za drugą (jak w powyższym przykładzie).

19. Uwaga. Iloczyn AB istnieje tylko wtedy, gdy liczba kolumn (długość wierszy) pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy (długości kolumn) drugiej macierzy.

20. Uwaga. Mnożenie macierzy nie jest przemienne: na ogół $AB \neq BA$ (nawet jeśli oba te iloczyny mają sens), np. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 22 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 5 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$.

21. Twierdzenie. Mnożenie macierzy jest: a) łączne, tzn. $(AB)C = A(BC)$, b) rozdzielne względem dodawania, tzn. $(A+B)C = AC + BC$ oraz $A(B+C) = AB + AC$ dla dowolnych macierzy A, B, C , dla których działania są wykonalne.

22. Uwaga. Dla dowolnej macierzy $A \in M(n \times n)$ zachodzą równości $I_n A = A I_n = A$.

23. Definicja. Wyróżniamy następujące operacje elementarne na wierszach macierzy:

I. pomnożenie wybranego wiersza przez liczbę różną od zera.

II. zamiana dwóch wierszy miejscami.

III. dodanie jednego wiersza pomnożonego przez liczbę do innego wiersza.

24. Definicja. Macierz A jest w postaci schodkowej wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. liczba początkowych zer w każdym niezerowym wierszu (oprócz pierwszego) jest większa, niż w wierszu poprzednim oraz

2. każdy wiersz zerowy stoi poniżej każdego niezerowego.

Liczba niezerowych wierszy w macierzy schodkowej nazywa się jej liczbą schodków.

25. Przykład. Macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ jest w postaci schodkowej. Ma trzy schodki.

26. Twierdzenie-definicja. Każdą macierz A można przy pomocy kolejno wykonywanych operacji elementarnych na wierszach doprowadzić do postaci schodkowej. Liczba schodków nie zależy od wykonanych operacji elementarnych i nazywa się rzędem macierzy A .

27. Przykład. Sprowadzimy macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ do postaci schodkowej i obliczymy jej rząd.

Operacje elementarne zaplanowane do wykonania będziemy zaznaczać po prawej stronie macierzy: obok wiersza zaznaczamy, który wiersz go zastąpi.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 8 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} w_2 \\ w_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 8 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)w_1 + w_3 \\ (-2)w_1 + w_4 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)w_2 + w_3 \\ (-3)w_2 + w_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} w_3 + w_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ są trzy schodki w postaci schodkowej, to rząd macierzy A jest równy 3, $r(A) = 3$.

28. Macierz kwadratowa stopnia n i rzędu n (tzn. mająca n schodków po sprowadzeniu do postaci schodkowej) nazywa się macierzą nieosobliwą stopnia n .

29. Twierdzenie. Niech A będzie macierzą nieosobliwą stopnia n . Wtedy istnieje taka macierz $B \in M(n \times n)$, że $AB = BA = I_n$. Macierz B jest wyznaczona jednoznacznie i nazywa się macierzą odwrotną do A . Oznaczamy ją symbolem A^{-1} .

Dowód. Zauważmy, że operacje elementarne na wierszach macierzy A można realizować, jako mnożenie z lewej strony przez odpowiednio dobrane macierze. Zobaczmy to na przykładach do wypełnienia.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c + g & 2h & 2i \end{pmatrix}.$$

Gdy macierz A jest rzędu n , to przy pomocy odpowiednich operacji elementarnych można ją doprowadzić najpierw do postaci trójkątnej górnej, a potem do macierzy jednostkowej. Oznacza to, że dla pewnych macierzy $P_1, P_2, \dots, P_k$ zachodzi równość $P_k \dots P_2 P_1 A = I_n$. Oznaczając $B = P_k \dots P_2 P_1$ otrzymujemy równość $BA = I_n$. Z równości $BA = I_n$ wynika równość $AB = I_n$, dowód tego faktu pomijamy.

wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem każdego z równań układu.

38. Przykład. Rozwiązaniem układu $\begin{cases} x + 2y - z + w = 1, \\ 2x + 3y + 2w = -1 \end{cases}$ jest wektor $(-7, 5, 1, -1)$, a także wektor $(-6, 3, 0, 1)$.

39. Macierzą współczynników układu U jw. nazywa się macierz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$, a macierzą rozszerzoną – macierz $[A, B] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}$, B oznacza tu kolumnę wyrazów wolnych.

40. Uwaga. Jeśli oznaczymy przez X kolumnę niewiadomych, to układ U można zapisać w postaci macierzowej: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}$ lub krócej $AX = B$.

41. Metoda macierzowa. Ma ona zastosowanie do układów równań postaci $AX = B$, w których A jest macierzą kwadratową nieosobliwą, tzn. dla układów, w których liczba równań jest równa liczbie niewiadomych, a macierz współczynników jest nieosobliwa (posiada macierz odwrotną). Metoda polega na zastąpieniu równania macierzowego $AX = B$ przez równanie $X = A^{-1}B$ (otrzymane przez pomnożenie z lewej strony przez macierz A^{-1}).

42. Przykład. Rozwiążemy układ $\begin{cases} 2x + 3y + z = 13, \\ x + y = 7, \\ 3x + 2y - 2z = 17. \end{cases}$ W postaci macierzowej wygląda on tak:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}. \text{ Znajdujemy macierz odwrotną do macierzy współczynników:}$$

$$[A, I] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} w_2 \\ w_1 \\ w_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)w_1 + w_2 \\ (-3)w_1 + w_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)w_2 + w_1 \\ w_2 + w_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)w_3 \\ w_3 + w_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} w_3 + w_1 \\ (-w_3) + w_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Ponieważ w lewym bloku}$$

jest macierz jednostkowa I_3 , to $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Zatem równanie macierzowe $AX = B$ jest

równoważne z równaniem $X = A^{-1}B$, tzn. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Zatem jedynym rozwiązaniem jest wektor $(13, -6, 5)$.