

1. Twierdzenie (reguła de l'Hospitala). Niech $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi, przy czym $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ lub jeżeli $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty$, to z istnienia granicy (skończonej lub nie) $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ wynika istnienie granicy $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz równość $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Twierdzenie jest prawdziwe również dla granic lewostronnych oraz w przypadkach $a = -\infty, b = +\infty$, a także dla granic (obustronnych).

Dowód w przypadku, gdy $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ oraz istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G$. Rozszerzamy definicje funkcji f i g na przedział $[a, b)$ określając $f(a) = 0, g(a) = 0$. Z założeń wynika, że (rozszerzone) funkcje f i g są ciągłe na przedziale $[a, b)$ i różniczkowalne w (a, b) . Chcemy wykazać, że $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$. Posłużymy się definicją Heinego granicy funkcji. Rozpatrzmy dowolny ciąg (x_n) o wyrazach $x_n \in (a, b)$ zbieżny do a . Wtedy $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-0}{g(x_n)-0} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}$. Z twierdzenia Cauchy'ego zastosowanego do funkcji f i g na przedziale $[a, x_n]$ wynika, że w przedziale (a, x_n) istnieje taki punkt z_n , że zachodzi równość $\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}$. Dla każdego wyrazu x_n mamy więc wyraz z_n , przy czym zachodzą nierówności $a < z_n < x_n$, a ponieważ ciąg (x_n) jest zbieżny do a , to i ciąg (z_n) jest zbieżny do a (twierdzenie o trzech ciągach). Ponieważ $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G$, to i $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)} = G$. Oznacza to, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = G$, a ponieważ ciąg (x_n) był dowolny, z definicji Heinego wynika, że $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$.

2. Uwaga. Stosując regułę de l'Hospitala zaznaczać będziemy spełnienie założenia o granicach, a pod znakiem równości będziemy pisać literę H. Proszę zwrócić uwagę na to, że zapis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ jest równością tylko wtedy, gdy granica po prawej stronie istnieje. Jeśli granica po prawej stronie nie istnieje, nie możemy twierdzić, że nie istnieje granica po stronie lewej.

3. Przykład. Obliczymy kilka granic przy pomocy reguły de l'Hospitala, za każdym razem sprawdzając założenia. Niektóre z tych granic obliczyliśmy już poprzednio.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{3 \cos 3x} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + 12}{2x^3 - 4x + 7} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18x^2 - 10x}{6x^2 - 4} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 6}{1} = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Z ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(2 \ln x)x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(2 \ln x)}{-x^{-1}} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x^{-1}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x) = 0$. Zauważmy, że w tym przykładzie dwa razy zastosowaliśmy regułę de l'Hospitala.

4. Definicja. Niech f oznacza funkcję różniczkowalną na przedziale I . Wtedy drugą pochodną (lub pochodną rzędu drugiego) funkcji f w punkcie x_0 nazywamy pochodną funkcji f' w punkcie x_0 , tzn. $f''(x_0) = (f')'(x_0)$. Podobnie określamy pochodne wyższych rzędów. Pochodną rzędu n funkcji f oznaczamy symbolem $f^{(n)}$. Inne oznaczenie, to $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ lub krócej $\frac{d^n f}{dx^n}$.

5. Przykład. Niech $f(x) = \ln x$. Wtedy $f''(x) = (\ln'(x))' = (x^{-1})' = -x^{-2}$.

6. Twierdzenie (Drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum). Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $c \in (a, b)$ drugą pochodną oraz że $f'(c) = 0$. Wtedy jeśli $f''(c) < 0$, to funkcja f ma w c maksimum lokalne, a jeśli $f''(c) > 0$, to funkcja f ma w c minimum lokalne.

7. Przykład. Sprawdźmy, czy funkcja $f(x) = e^x \ln x - ex$ ma w punkcie $x_0 = 1$ ekstremum lokalne. Obliczamy kolejno pochodne: $f'(x) = e^x \ln x + \frac{1}{x}e^x - e, f''(x) = e^x(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}), f'(1) = 0, f''(1) = e > 0$, zatem funkcja f ma minimum lokalne w punkcie $x_0 = 1$.

8. Definicja. Niech I oznacza przedział. Funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się wypukłą (odp. wklęsłą) jeśli dla dowolnych liczb $a, b \in I, a < b$, żaden punkt części wykresu funkcji f między punktami $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ nie leży powyżej (odp. poniżej) odcinka łączącego te punkty.

9. Przykład. Funkcja moduł $f(x) = |x|$ jest wypukła. Funkcja $f(x) = ax^2$ jest wypukła, jeśli $a \geq 0$ i jest wklęsła, jeśli $a \leq 0$.
10. Twierdzenie. Funkcja różniczkowalna $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą.
11. Twierdzenie. Funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy jej druga pochodna $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieujemną.
12. Uwaga. Analogiczne twierdzenia zachodzą dla funkcji wklęsłych.
13. Przykład. Funkcja wykładnicza e^x jest wypukła, bo jej druga pochodna e^x jest dodatnia, a funkcja logarytmiczna $\ln x$ jest wklęsła, bo jej druga pochodna $-\frac{1}{x^2}$ jest ujemna.
14. Przykład. Znajdziemy przedziały wklęsłości i przedziały wypukłości funkcji $f(x) = \ln^2 x$. Dziedziną jest półprosta $(0, +\infty)$. Obliczamy pochodne: $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, $f''(x) = \frac{2-2 \ln x}{x^2}$. $f''(x) > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e$. Zatem funkcja f jest wypukła na przedziale $(0, e)$ i wklęsła na przedziale $(e, +\infty)$.
15. Definicja. Liczba $c \in (a, b)$ nazywa się punktem przegięcia funkcji $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $\delta > 0$, że na jednym z przedziałów $(c - \delta; c)$, $(c; c + \delta)$ funkcja f jest wklęsła, a na drugim wypukła. Punkt $(c, f(c))$ nazywa się wtedy punktem przegięcia wykresu funkcji f .
16. Przykład. Liczba 0 jest punktem przegięcia funkcji x^3 , a punkt $(0, 0)$ jest punktem przegięcia jej wykresu.

Aby naszkicować wykres funkcji zadanej wzorem, wykonuje się najpierw obliczenia, które pozwolą naszkicować ten wykres tak, żeby istotne własności były możliwie dokładnie przedstawione. Wykonywanie tych obliczeń nazywa się badaniem funkcji.

17. Badanie przebiegu zmienności funkcji f , schemat postępowania:
 - (a) Wyznacz dziedzinę funkcji f .
 - (b) Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami współrzędnych (o ile dasz radę, nie zawsze jest to możliwe).
 - (c) Zbadaj parzystość, nieparzystość, okresowość (można ten punkt pominąć, natomiast jeśli stwierdzimy, że funkcja ma którąś z tych własności, możemy zaoszczędzić sporo pracy w dalszym ciągu rozwiązania).
 - (d) Oblicz granice na krańcach dziedziny.
 - (e) Zbadaj istnienie asymptot i znajdź ich równania.
 - (f) Oblicz pochodną funkcji f oraz wyznacz dziedzinę tej pochodnej.
 - (g) Rozwiąż równanie $f'(x) = 0$, nierówność $f'(x) > 0$ oraz nierówność $f'(x) < 0$.
 - (h) Oblicz drugą pochodną funkcji f oraz wyznacz jej dziedzinę.
 - (i) Rozwiąż równanie $f''(x) = 0$, nierówność $f''(x) > 0$ oraz nierówność $f''(x) < 0$.
 - (j) Wypełnij tabelkę przebiegu zmienności funkcji f .
 - (k) Ewentualnie oblicz granice pochodnej na krańcach dziedziny lub wartości funkcji w "dodatkowych" punktach.
 - (l) Narysuj układ współrzędnych (najlepiej z równymi jednostkami długości na każdej z osi).
 - (m) Zaznacz asymptoty, istotne punkty oraz kawałki stycznych w istotnych punktach.
 - (n) Naszkicuj wykres funkcji f posuwając się od jednego istotnego punktu do drugiego dbając o to, żeby był styczny do kawałków stycznych i żeby miał kształt zgodny z danymi z tabelki.

Zbadamy teraz przebieg zmienności funkcji i naszkicujemy wykresy kilku funkcji:

18. Przykład. $f(x) = \frac{x^2}{9} - \frac{3}{x^2}$. Dziedziną jest zbiór $Df = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Wykres nie przecina osi rzędnych, a oś odciętych przecina w punktach $(-\sqrt[4]{27}, 0), (\sqrt[4]{27}, 0)$.

Funkcja jest parzysta, zbadamy ją na przedziale $(0, +\infty)$, a następnie odbijemy część wykresu względem osi rzędnych i w ten sposób uzyskamy resztę.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty.$$

Zatem funkcja f ma asymptotę pionową $x = 0$ i nie ma innych asymptot pionowych, bo jest ciągła w każdym punkcie $x \neq 0$.

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, to nie ma również asymptot ukośnych.

Funkcja pochodna $f'(x) = \frac{2x}{9} + \frac{3}{x^3} = \frac{2(x^4+27)}{9x^3}$ jest określona na całym zbiorze Df .

$f'(x) > 0$ dla wszystkich $x > 0$.

$$f''(x) = \frac{8}{9} - \frac{2(x^4+27)}{3x^4} = \frac{2x^4-162}{9x^4} = \frac{2(x-3)(x+3)(x^2+9)}{9x^4} \text{ dla } x \in Df.$$

Dla $x > 0$ mamy: $f''(x) = 0 \iff x = 3$.

Dla $x > 0$ mamy: $f''(x) > 0 \iff x \in (3, +\infty)$, a $f''(x) < 0 \iff x \in (0, 3)$.

Ustawiamy w porządku rosnącym (lub zaznaczamy na osi liczbowej) istotne punkty, tzn.: punkty zerowania pierwszej lub drugiej pochodnej, punkty nieciągłości, nieróżniczkowalności, punkty będące krańcami przedziałów określoności: $0 < 3$.

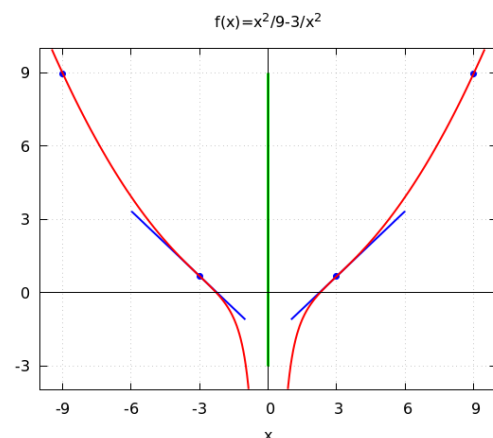
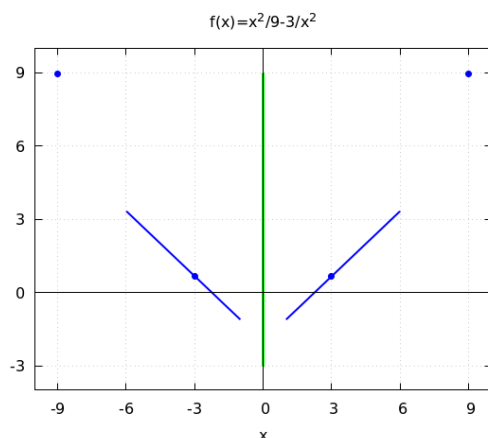
Zebrane informacje na temat znaku pierwszej i drugiej pochodnej umieszczamy w tabelce. Przeznaczamy w niej po jednej wąskiej kolumnie dla każdego istotnego punktu. Dla przedziałów przeznaczamy szerokie kolumny.

x	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	$\frac{8}{9}$	+
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$\curvearrowright$	$\frac{2}{3}$	$\curvearrowleft$

Szkicujemy osie układu współrzędnych i zaznaczamy na nich skalę. Nanosimy asymptoty (w tym przykładzie jest jedna, pionowa, zaznaczona na zielono) oraz jedyny istotny punkt o odciętej $x = 3$ po prawej stronie osi rzędnych i odcinek stycznej do wykresu w tym punkcie. Punkt ten i odcinek stycznej odbijamy symetrycznie na stronę lewą.

Ponieważ w danym przypadku jest mało istotnych punktów, to dodajemy jeden $x = 9$ (i symetryczny z nim $x = -9$, obliczamy wartości funkcji w tych punktach $f(9) = f(-9) = 9 - \frac{2}{81}$.

Następnie szkicujemy wykres od jednego istotnego punktu do następnego dbając o to, by w tych punktach wykres był styczny do zaznaczonych kawałków stycznych oraz o to, by jego kształt był typu wskazanego w dolnym wierszu tabelki.



19. Przykład. $g(x) = \frac{(x-2)^3}{x^2+1}$. Dziedziną jest cały zbiór liczb rzeczywistych.

Wykres przecina oś rzędnych w punkcie $(0, -8)$, a oś odciętych w punkcie $(2, 0)$.

Nie stwierdzamy parzystości, nieparzystości ani okresowości.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$, więc nie ma asymptot pionowych.

Asymptota ukośna (w $-\infty$ oraz w $+\infty$) ma równanie $y = x - 6$.

Funkcja pochodna $g'(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)(x+3)}{(x^2+1)^2}$ jest określona na całym zbiorze $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 0 \iff x = -3 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 2.$$

$$g'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty), \text{ a } g'(x) < 0 \iff x \in (-3, -1).$$

$$g''(x) = \frac{2(x-2)(11x^2+16x-1)}{(x^2+1)^3} \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

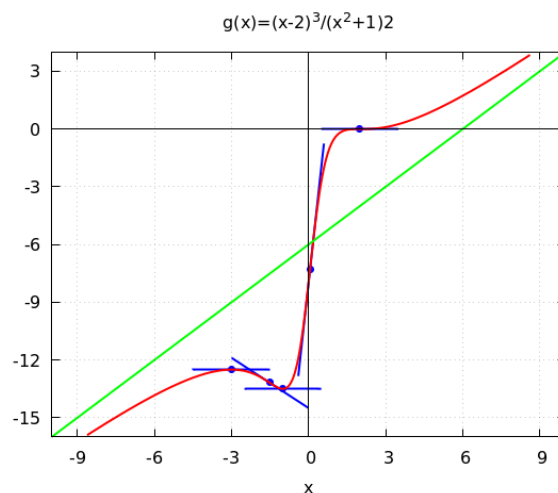
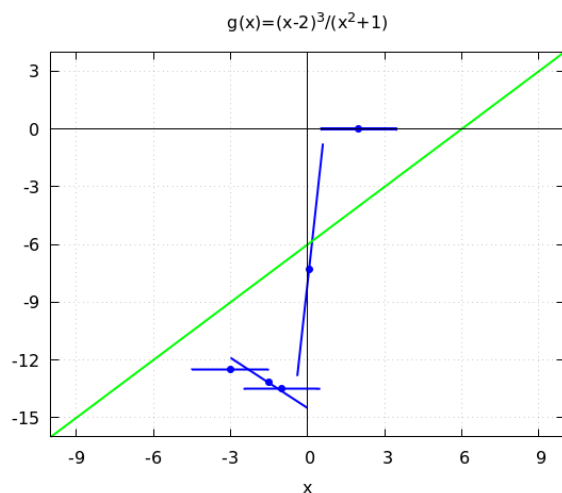
$$g''(x) = 0 \iff x = 2 \text{ lub } x = x_1 := \frac{-8-5\sqrt{3}}{11} \simeq -1.5 \text{ lub } x = x_2 := \frac{-8+5\sqrt{3}}{11} \simeq 0.1.$$

$$g''(x) > 0 \iff x \in (x_1, x_2) \cup (2, +\infty), \text{ a } g''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, 2).$$

Porządkujemy istotne punkty $-3 < x_1 \simeq -1.5 < -1 < x_2 \simeq 0.1 < 2$ oraz wypełniamy tabelkę.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, x_1)$	x_1	$(x_1, -1)$	-1	$(-1, x_2)$	x_2	$(x_2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	$\simeq -0.9$	-	0	+	$\simeq 12$	+	0	+
$g''(x)$	-		-		+		+		-		+
$g(x)$	$\curvearrowright$	-12.5	$\curvearrowleft$	$\simeq -13.2$	$\curvearrowright$	-13.5	$\curvearrowleft$	$\simeq -7.3$	$\curvearrowright$	0	$\curvearrowleft$

Szkicujemy osie układu współrzędnych i zaznaczamy na nich skalę. Nanosimy asymptoty oraz istotne punkty i odcinki stycznych w tych punktach. Następnie szkicujemy wykres od jednego istotnego punktu do następnego dbając o to, by w tych punktach wykres był styczny do zaznaczonych kawałków stycznych oraz o to, by jego kształt był typu wskazanego w dolnym wierszu tabelki.



20. Przykład. $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 7x - 6)e^x$. $D = \mathbb{R}$.

Rozkładamy wielomian na czynniki: $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = (x-2)(x^2 - 2x + 3)$. Pierwszy czynnik zeruje się w punkcie $x = 2$, drugi nie ma miejsc zerowych. Ponieważ $e^x > 0$ dla każdej wartości $x \in \mathbb{R}$, to wykres funkcji $h(x)$ przecina oś odciętych w punkcie $(2, 0)$, a oś rzędnych w punkcie $(0, -6)$ (bo $h(0) = -6$).

Nie stwierdzamy parzystości, nieparzystości ani okresowości.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 6}{e^{-x}} \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 8x + 7}{-e^{-x}} \left[\frac{+\infty}{-\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 8}{e^{-x}} \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{-e^{-x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Wykres nie ma asymptot pionowych, bo funkcja h jest ciągła na $\mathbb{R}$. Prosta $y = 0$ jest asymptotą w $-\infty$, bo $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$. Asymptoty ukośnej w $+\infty$ brak, bo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$.

Funkcja pochodna $h'(x) = (x^3 - x^2 - x + 1)e^x = (x - 1)^2(x + 1)e^x$ jest określona na $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = 0 \iff x = 1 \text{ lub } x = -1.$$

$$h'(x) > 0 \iff x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty), \text{ a } h'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1).$$

$$h''(x) = (x^3 + 2x^2 - 3x)e^x = (x - 1)x(x + 3)e^x \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

$$h''(x) = 0 \iff x = -3 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 1.$$

$$h''(x) > 0 \iff x \in (-3, 0) \cup (1, +\infty), \text{ a } h''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (0, 1).$$

Istotne punkty to: $-3, -1, 0, 1$, wartości funkcji i jej pochodnej w tych punktach: $h(-3) = -90e^{-3} \simeq -4.5$, $h(-1) = -18e^{-1} \simeq -6.6$, $h(0) = -6$, $h(1) = -2e \simeq -5.4$; $h'(-3) = -32e^{-3} \simeq -1.6$, $h'(-1) = 0$, $h'(0) = 1$, $h'(1) = 0$.

Wypełniamy tabelkę.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	—	$\simeq -1.6$	—	0	+	1	+	0	+
$h''(x)$	—		+		+		—		+
$h(x)$	$\searrow$	$\simeq -4.5$	$\searrow$	$\simeq -6.6$	$\nearrow$	-6	$\nearrow$	$\simeq -5.4$	$\nearrow$

Szkicujemy osie układu współrzędnych i zaznaczamy na nich skalę. Nanosimy asymptotę poziomą oraz istotne punkty i odcinki stycznych w tych punktach. Następnie szkicujemy wykres od jednego istotnego punktu do następnego dbając o to, by w tych punktach wykres był styczny do zaznaczonych kawałków stycznych oraz o to, by jego kształt był typu wskazanego w dolnym wierszu tabelki.

