

1. Przykład (Interpretacja fizyczna). Przypomnijmy, że prędkość średnią uzyskaną przez poruszający się obiekt określamy jako stosunek przebytej drogi do czasu, w którym ta droga została przebyta. Niech funkcja  $f(t)$  przedstawia drogę przebytą przez poruszający się obiekt od ustalonego momentu do chwili  $t$ . Wtedy iloraz  $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$  oznacza prędkość średnią uzyskaną między chwilą  $t_0$  a chwilą  $t_0 + h$ . Przechodząc z tym ilorazem do granicy przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy prędkość chwilową w chwili  $t_0$ . Zatem pochodna funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t_0$ , to prędkość chwilowa tego obiektu w chwili  $t_0$ . Ogólniej, jeśli funkcja  $f(t)$  przedstawia zależność jakiejś wielkości od czasu, to pochodna  $f'(t_0)$  oznacza prędkość chwilową zmiany tej wielkości w chwili  $t_0$ .
2. Lej w ziemi (lub dolina) ma kształt stożka o przekroju osiowym w kształcie trójkąta prostokątnego. Do leja wpływa woda w tempie  $\pi$  metrów sześciennych na minutę. Obliczmy prędkość podnoszenia się poziomu wody w chwili, gdy ten poziom osiągnął 9 metrów. Oznaczmy przez  $h(t)$  poziom wody w leju w chwili  $t$  (czas mierzymy w minutach od momentu, gdy woda zaczęła się dostawać do leja). Ilość wody w leju w chwili  $t$  możemy wyrazić na dwa sposoby, stąd wynika równość  $\pi t = \frac{1}{3}\pi h(t)^3$ , więc  $h(t) = \sqrt[3]{3t}$  oraz  $h'(t) = \frac{3}{3(\sqrt[3]{3t})^2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{3t})^2}$ . W chwili  $t_0$ , gdy  $h(t_0) = 9 = \sqrt[3]{3t_0}$ , mamy więc  $h'(t_0) = \frac{1}{(\sqrt[3]{3t_0})^2} = \frac{1}{81}(\text{m/min})$ .
3. Definicja. Jeśli pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  istnieje i jest liczbą, to prosta przechodząca przez punkt  $(x_0, f(x_0))$  i mająca współczynnik kierunkowy równy  $f'(x_0)$  nazywa się prostą styczną do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$ .
4. Wniosek. Niech  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją różniczkowalną w punkcie  $x_0 \in (a, b)$ . Prosta styczna w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  do wykresu funkcji  $f$  ma równanie  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .  
Dowód. Równanie to przedstawia prostą, która przechodzi przez punkt  $(x_0, f(x_0))$  oraz ma współczynnik kierunkowy równy  $f'(x_0)$ .
5. Przykład. Znajdziemy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \ln(1+x)$  w punkcie o odciętej  $x_0 = 0$ . Obliczamy kolejno  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $f'(0) = 1$ . Zatem prosta styczna ma równanie  $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$ . Warto porównać ten wynik z ważną granicą  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ . Licznik jest wartością funkcji w  $x$ , a mianownik jest wartością funkcji liniowej, której wykresem jest styczna.
6. Przykład. Znajdziemy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = x \ln x$  w punkcie  $(e, e)$ . Obliczamy kolejno  $f(e) = e$ ,  $f'(x) = \ln x + 1$ ,  $f'(e) = 2$ . Zatem prosta styczna ma równanie  $y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) + e$ , czyli  $y = 2x - e$ .  
W pobliżu punktu styczności punkty prostej stycznej leżą blisko punktów wykresu. Można tę własność wykorzystać do obliczania przybliżonych wartości funkcji.
7. Wniosek. Wzór przybliżony na wartości funkcji  $f$  w pobliżu punktu  $x_0$  (przy oznaczeniach, j.w.):  $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$ . Wyrażenie  $f'(x_0) \cdot h$  (jest to funkcja liniowa zmiennej  $h$ ) nazywa się różniczką funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ .
8. Przykład. Obliczmy przybliżoną wartość  $\sqrt{17}$ . Niech  $f(x) = \sqrt{x}$  i niech  $x_0 = 16$ . Wtedy  $f(x_0) = 4$ ,  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$ , zatem z powyższego wzoru otrzymujemy przybliżenie  $\sqrt{17} \simeq 4 + \frac{1}{8}(17 - 16) = 4.125$ . Przybliżenie z kalkulatora wynosi 4.1231056...
9. Twierdzenie Fermata. Jeżeli funkcja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $c \in (a, b)$  i przyjmuje w  $c$  swoją wartość największą (lub najmniejszą), to  $f'(c) = 0$ .  
Dowód. Niech  $h > 0$ . Wtedy  $f(c+h) \leq f(c)$  (gdy  $f(c)$  jest wartością największą). Zatem  $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ . W granicy przy  $h$  dążącym do 0 ten znak się zachowa, otrzymujemy więc, że  $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ . Podobnie,  $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ , gdy  $h \leq 0$ , a zatem  $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ . Jeśli więc pochodna funkcji  $f$  w  $c$

istnieje, to musi być równa 0. Interpretacja geometryczna tego twierdzenia jest następująca: jeśli w najwyższym punkcie wykresu istnieje styczna, to ta styczna jest pozioma.

10. Wniosek. Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą na przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalną w  $(a, b)$ . Wtedy funkcja  $f$  przyjmuje swoją wartość największą albo na krańcu przedziału albo w punkcie zerowania pochodnej. To samo dotyczy wartości najmniejszej.

Dowód. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że funkcja  $f$  przyjmuje swoją wartość największą w pewnym punkcie przedziału  $[a, b]$ . Ta wartość jest przyjęta albo na krańcu przedziału albo wewnątrz. Jeśli wewnątrz, to z twierdzenia Fermata wynika, że w punkcie zerowania pochodnej.

11. Znajdziemy wartość najmniejszą i wartość największą funkcji  $f(x) = 3x^5 - 15x^4 - 5x^3 + 30x^2 + 7$  na przedziale  $[-2, 2]$ . Obliczamy pochodną:  $f'(x) = 15x^4 - 60x^3 - 15x^2 + 60x = 15x(x^3 - 4x^2 - x + 4) = 15x(x-4)(x-1)(x+1)$ . Miejscami zerowania pochodnej są liczby  $-1, 0, 1, 4$ . Do przedziału  $[-2, 2]$  należą spośród nich  $-1, 0, 1$ . Obliczamy więc wartości funkcji  $f$  w tych punktach oraz na krańcach przedziału:  $f(-2) = -169$ ,  $f(-1) = 24$ ,  $f(0) = 7$ ,  $f(1) = 20$ ,  $f(2) = -57$ . Zatem wartością najmniejszą na przedziale  $[-2, 2]$  jest najmniejsza z tych wartości, czyli liczba  $-169 = f(-2)$ , a wartością największą jest liczba  $24 = f(-1)$ .

12. Twierdzenie Rolle'a. Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ , różniczkowalna na przedziale  $(a, b)$  oraz spełnia równość  $f(a) = f(b)$ , to jej pochodna w pewnym punkcie  $c \in (a, b)$  ma wartość 0.

Dowód. Jeśli funkcja  $f$  jest stała, to jej pochodna jest równa 0 w każdym punkcie. Jeśli nie jest stała, to z twierdzenia Weierstrassa wynika, że funkcja  $f$  przyjmuje swoją wartość największą lub swoją wartość najmniejszą w pewnym punkcie  $c$  przedziału  $(a, b)$ . Z twierdzenia Fermata wynika, że  $f'(c) = 0$ .

13. Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Jeżeli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą w przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalną w przedziale  $(a, b)$ , to istnieje taki punkt  $c \in (a, b)$ , że  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

Dowód. Teza wynika z twierdzenia Rolle'a zastosowanego do funkcji  $f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$ .

Interpretacja geometryczna tego twierdzenia jest następująca: dla funkcji różniczkowalnej na przedziale  $(a, b)$  i ciągłej na przedziale  $[a, b]$  prosta styczna w pewnym punkcie  $c \in (a, b)$  jest równoległa do prostej łączącej punkty końcowe wykresu.

14. Wniosek. Niech  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  oznacza funkcję różniczkowalną w przedziale otwartym  $I$ . Wtedy:

- jeśli  $f'(x) = 0$  dla każdego  $x \in I$ , to funkcja  $f$  jest stała.
- jeśli  $f'(x) > 0$  dla każdego  $x \in I$ , to funkcja  $f$  jest rosnąca.
- jeśli  $f'(x) < 0$  dla każdego  $x \in I$ , to funkcja  $f$  jest malejąca.
- jeśli  $f$  jest niemalejąca na  $I$ , to  $f'(x) \geq 0$  dla każdego  $x \in I$ .
- jeśli  $f$  jest nierosnąca na  $I$ , to  $f'(x) \leq 0$  dla każdego  $x \in I$ .

Dowód a). Gdyby funkcja  $f$  nie była stała, to dla pewnych dwóch punktów  $a, b \in I$  mielibyśmy  $f(b) \neq f(a)$ , ale wtedy istniałby taki punkt  $c$  leżący między  $a$  i  $b$ , że  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0$ , co jest sprzeczne z założeniem. Dowody punktów b, c są podobne, pozostawiam je jako ćwiczenie.

Dowód d). Jeśli istnieje taki punkt  $c \in I$ , że  $f'(c) < 0$ , to dla dodatnich  $h$  dostatecznie bliskich 0, wartość ilorazu różnicowego  $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$  też musi być ujemna. Z tego wynika, że dla tych  $h$  zachodzi nierówność  $f(c+h) < f(c)$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $f$  jest niemalejąca. Dowód punktu e) jest podobny, pozostawiam go jako ćwiczenie.

15. Uwaga. Punkty a), b) i c) powyższego Wniosku są prawdziwe również dla funkcji ciągłych na przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalnych na  $(a, b)$ .

16. Przykład. Implikacji w punkcie b) nie można odwrócić. Funkcja  $f(x) = x^3$  jest rosnąca na całym zbiorze  $\mathbb{R}$ , ale jej pochodna w punkcie  $x = 0$  jest równa 0.

17. Przykład. Niech  $f(x) = x^2$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $f'(x) = 2x$ , zatem  $f'(x) > 0$  dla  $x > 0$  oraz  $f'(x) < 0$  dla  $x < 0$ . Wynika z tego, że funkcja  $x^2$  jest rosnąca na przedziale  $[0, +\infty)$  oraz jest malejąca na przedziale  $(-\infty, 0]$ . Oczywiście zgadza się to z naszymi wiadomościami ze szkoły.
18. Przykład. Znajdziemy przedziały monotoniczności funkcji  $f(x) = x \ln x$ . Dziedziną jest przedział  $(0, +\infty)$ . Obliczamy pochodną:  $f'(x) = \ln x + 1$ . Zatem  $f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$ . Podobnie,  $f'(x) < 0 \iff x \in (0, e^{-1})$ . Zatem funkcja  $f$  jest rosnąca na przedziale  $[e^{-1}, +\infty)$  oraz jest malejąca na przedziale  $(0, e^{-1}]$ .
19. Uwaga. Twierdzenie Lagrange'a i powyższy wniosek dotyczą funkcji określonych na przedziale. Funkcja  $h(x) = \frac{1}{x}$  ma wszędzie ujemną pochodną, ale nie jest funkcją malejącą. Dokładniej:  $h$  maleje na przedziale  $(-\infty, 0)$  oraz maleje na przedziale  $(0, +\infty)$ , ale nie maleje na swojej dziedzinie  $D_h = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  (bo np.  $-1 < 1$ , a  $h(-1) = -1 < 1 = h(1)$ ).
20. Definicja. Mówimy, że funkcja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ma w punkcie  $c \in (a, b)$  minimum (odpowiednio maksimum) lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że  $f(c)$  jest najmniejszą (odpowiednio największą) wartością funkcji  $f$  na przedziale  $(c - \delta, c + \delta)$ . Lokalne minima i lokalne maksima obejmuje się wspólną nazwą: lokalne ekstrema.
21. Uwaga. Z twierdzenia Fermata wynika, że zerowanie pochodnej w punkcie jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej w tym punkcie.
22. Twierdzenie (warunek dostateczny istnienia ekstremum). Funkcja różniczkowalna  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ma w punkcie  $c \in (a, b)$  ekstremum lokalne jeśli  $f'(c) = 0$  oraz funkcja  $f'$  zmienia w  $c$  znak. Dokładniej, jeśli istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że  $f'(x) \leq 0$  dla  $x \in (c - \delta, c)$  oraz  $f'(x) \geq 0$  dla  $x \in (c, c + \delta)$ , to funkcja  $f$  ma w  $c$  minimum lokalne, a jeśli istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że  $f'(x) \geq 0$  dla  $x \in (c - \delta, c)$  oraz  $f'(x) \leq 0$  dla  $x \in (c, c + \delta)$ , to funkcja  $f$  ma w  $c$  maksimum lokalne.
23. Przykład. Funkcja  $f(x) = x^3 - 3x$  ma w punkcie  $c_1 = -1$  maksimum lokalne, a w punkcie  $c_2 = 1$  minimum lokalne, bo jej pochodna  $f'(x) = 3x^2 - 3$  jest dodatnia na przedziałach  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$  i jest ujemna na przedziale  $(-1, 1)$ , zatem w punkcie  $c_1$  zmienia znak z dodatniego na ujemny, a w punkcie  $c_2$  z ujemnego na dodatni.

Następujące twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

24. Twierdzenie Cauchy'ego. Jeżeli funkcje ciągłe  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są różniczkowalne na  $(a, b)$ , przy czym  $g(a) \neq g(b)$  oraz  $g'(x) \neq 0$  dla każdego  $x \in (a, b)$ , to istnieje taka liczba  $c \in (a, b)$ , że  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

Dowód. Niech  $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g(x)$ . Funkcja  $h$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalna w  $(a, b)$ , a ponadto ma równe wartości w punktach  $a$  i  $b$ :  $h(b) - h(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = 0$ . Zatem z twierdzenia Rolle'a wynika, że dla pewnej liczby  $c \in (a, b)$  zachodzi równość  $h'(c) = 0$ , tzn.  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$ . Dzieląc stronami przez liczbę  $g'(c)$  (różną od 0 z założenia) otrzymujemy tezę.

Z twierdzeniem Cauchy'ego można związać następującą intuicję. Zapiszmy parę funkcji  $f(x), g(x)$  jako jedną funkcję wektorową  $(f(x), g(x))$ . Taka funkcja opisuje na przykład położenie punktu na płaszczyźnie w chwili  $x$  (funkcje  $f(x), g(x)$  oznaczają wtedy współrzędne kartezjańskie). Wtedy wektor  $[f'(x), g'(x)]$  jest wektorem prędkości poruszającego się punktu. Zatem równość z tezy oznacza, że w pewnej chwili wektor prędkości jest równoległy do kierunku łączącego punkt początkowy z punktem końcowym.