

1. Definicja. Funkcja f określona na przedziale D nazywa się ciągłą w punkcie $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ istnieje oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Funkcja f nazywa się lewostronnie ciągłą w punkcie $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ istnieje oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Funkcja f nazywa się prawostronnie ciągłą w punkcie $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ istnieje oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
2. Definicja. Funkcja f określona na przedziale D nazywa się ciągłą na tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału (a w punktach na krańcach jednostronnie ciągła – o ile te krańce należą do przedziału).
3. Przykład. Funkcje $\frac{1}{x}$ oraz $\operatorname{tg} x$ są ciągłe w każdym punkcie swoich dziedzin.
4. Twierdzenie (własności funkcji ciągłych).
 - a. Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
 - b. Funkcja rosnąca i ciągła na przedziale (lub malejąca i ciągła) ma funkcję odwrotną, która też jest funkcją ciągłą.
 - c. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, logarytmiczne i wykładnicze są funkcjami ciągłymi.
 - d. Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale D oraz $f(x_0) > 0$ dla pewnego $x_0 \in D$, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
5. Wniosek. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy a , a ciąg (b_n) jest zbieżny do granicy b i nie jest prawdą, że $a = b = 0$ ani że $a = +\infty, b = 0$ ani $a = 1, b = \pm\infty$, to ciąg $(a_n^{b_n})$ jest zbieżny do a^b .
 Dowód. Zapisujemy "kłopotliwą potęgę" $a_n^{b_n}$ jako potęgę o podstawie e : $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$, teza wynika z ciągłości funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej.
6. Przykład. Znajdziemy granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2n-3}{n^2+5n+1})^{4n}$: $(1 + \frac{2n-3}{n^2+5n+1})^{4n} = e^{4n \ln(1 + \frac{2n-3}{n^2+5n+1})} \rightarrow e^8$, bo $4n \ln(1 + \frac{2n-3}{n^2+5n+1}) = \frac{4n \ln(1 + \frac{2n-3}{n^2+5n+1})}{\frac{2n-3}{n^2+5n+1}} \cdot \frac{2n-3}{n^2+5n+1}$, a $\frac{\ln(1 + \frac{2n-3}{n^2+5n+1})}{\frac{2n-3}{n^2+5n+1}} \rightarrow 1$ i $\frac{4n(2n-3)}{n^2+5n+1} \rightarrow 8$.
7. Twierdzenie. Zbiór wartości funkcji ciągłej określonej na przedziale jest przedziałem lub zbiorem jednopunktowym. Inaczej mówiąc, każda funkcja ciągła f na przedziale $[a, b]$ ma następującą własność Darboux: dla dowolnej liczby z leżącej między $f(a)$ a $f(b)$ istnieje taki punkt $c \in [a, b]$, że $f(c) = z$.
8. Wniosek. Każdy wielomian w nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.
 Dowód. Jeśli $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ jest wielomianem, a jego stopień jest liczbą nieparzystą oraz np. $a_n > 0$, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n (a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}) = +\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n (a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}) = -\infty$. Z tego wynika, że dla pewnych punktów x_0, x_1 mamy $w(x_0) < 0, w(x_1) > 0$. Wielomian w jest funkcją ciągłą, więc ma własność Darboux, zatem w pewnym punkcie leżącym pomiędzy wspomnianymi punktami ma wartość 0. Gdy $a_n < 0$, to dowód jest podobny.
9. Twierdzenie Weierstrassa. Funkcja ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym przyjmuje w pewnych punktach tego przedziału swoją wartość najmniejszą i swoją wartość największą. Dokładniej, jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to istnieją takie punkty $c, d \in [a, b]$, że dla wszystkich $x \in [a, b]$ zachodzą nierówności $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.
10. Założenia o przedziale oraz funkcji są konieczne, o czym świadczą przykłady funkcji ciągłej $f(x) = x$ określonej na (niedomkniętym) przedziale $(0, 1)$ i funkcji nieciągłej $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 1/2 & \text{dla } x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$ określonej na przedziale domkniętym $[-1, 1]$. Obie te funkcje nie przyjmują swoich wartości największych i najmniejszych.

11. Przypomnienie. Niech $D \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem i niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na D . Wtedy D nazywa się dziedziną funkcji f , elementy dziedziny nazywają się argumentami funkcji f . Wykresem funkcji f nazywa się zbiór punktów płaszczyzny postaci $(x, f(x))$, gdzie $x \in D$ jest dowolnym argumentem funkcji f .
12. Przykład. Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest linia prosta. Współczynnik kierunkowy a jest równy stosunkowi przyrostu wartości funkcji f na przedziale do długości tego przedziału. Mierzy on szybkość wzrostu (lub malenia, jeśli jest ujemny) funkcji f . Pochodna, o której teraz będzie mowa, pełni podobną rolę w odniesieniu do znacznie bardziej ogólnych funkcji niż funkcja liniowa.
13. Definicja. Niech $a < x_0 < b$ będą liczbami i niech f oznacza funkcję określoną na zbiorze zawierającym (a, b) . Pochodną $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Stosuje się też oznaczenie $\frac{df}{dx}(x_0)$.
14. Przykład. Obliczymy z definicji pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 1$: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$.
15. Uwaga. Pochodna funkcji f w punkcie x może nie istnieć, może też być równa $+\infty$ lub $-\infty$. Jeśli pochodna istnieje i jest liczbą, to funkcja f nazywa się wtedy różniczkowalna w punkcie x . Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się różniczkowalna w przedziale (a, b) , jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b) , to przyporządkowanie $x \mapsto f'(x)$ określa funkcję pochodną f' funkcji f .
16. Twierdzenie (o pochodnych funkcji elementarnych).
 1. $(x^a)' = ax^{a-1}$ dla $a \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego punktu x z dziedziny funkcji x^a ;
 2. $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$;
 3. $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$;
 4. $(e^x)' = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$;
 5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x > 0$.

Dowód. 2. $(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-\sin(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{h}{2}) \cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$, bo pierwszy czynnik dąży do 1 (ważne granice), a drugi do $\cos x$ (ciągłość funkcji $\cos$). Podobnie dowodzi się 3.

$$4. (e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{(e^h-1)}{h} = e^x \text{ (ważne granice).}$$

$$5. (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ (znowu ważne granice).}$$

$$1. \text{ Niech } a \in \mathbb{R} \text{ będzie dowolną liczbą. } (x^a)' = (e^{a \ln x})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(x+h)} - e^{a \ln x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{a \ln x} \cdot \frac{e^{a \ln(1+\frac{h}{x})} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{a \ln x} \cdot \frac{e^{\ln(1+\frac{h}{x})} - 1}{\ln(1+\frac{h}{x})} \cdot \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} \cdot \frac{1}{x} = e^{a \ln x} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x} = a^x \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1} \text{ (dwa razy ważne granice).}$$

17. Wniosek. 1. $c' = 0$ dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$. 2. $(a^x)' = a^x \ln a$ dla $a > 0, a \neq 1$. 3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ dla $a > 0, a \neq 1$.

Dowód. 1. Niech $c(x) = c$, wtedy $c'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h)-c(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$. 2, 3. Ćwiczenie.

18. Twierdzenie. Funkcja różniczkowalna w punkcie x jest ciągła w punkcie x .

Dowód. Skoro funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x , to granica $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ istnieje i jest liczbą. Zatem $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h)-f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0 \cdot f'(x) = 0$. Zatem $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$, czyli $\lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x)$.

19. Twierdzenie (o arytmetycznych własnościach pochodnej). Niech dane będą funkcje $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalne w punkcie $x \in (a, b)$ i niech $c \in \mathbb{R}$. Wtedy:

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$;
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
4. jeśli $g(x) \neq 0$, to $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Dowód równości 1 i 3, dwie pozostałe zostawiam jako ćwiczenie.

$$1. (f + g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

$$3. (fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

20. Przykład.

1. $(x^2 + \ln x - 1)' = (x^2)' + (\ln x)' - 1' = 2x + \frac{1}{x}$;
2. $(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$;
3. $(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$;
4. $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot x'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

21. Niech $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ będą dowolnymi funkcjami. Przypomnijmy, że złożeniem funkcji f oraz g nazywamy funkcję $g \circ f$ określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dla $x \in X$. Funkcja g nazywa się funkcją zewnętrzną, a funkcja f funkcją wewnętrzną.

22. Przykład. Jeśli $f(x) = \sin x$, a $g(x) = e^x$, to $(g \circ f)(x) = e^{\sin x}$, a $(f \circ g)(x) = \sin(e^x)$.

23. Twierdzenie (o pochodnej złożenia). Niech dana będzie funkcja $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ różniczkowalna w punkcie $x \in (a, b)$ oraz funkcja $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna w punkcie $f(x) \in (c, d)$. Wtedy funkcja $g \circ f$, określona wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, jest różniczkowalna w punkcie x oraz $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

$$\text{Dowód. } (g \circ f)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

24. Przykład. Znajdziemy funkcję pochodną funkcji $\sqrt{3x^2 + x + 1}$. Funkcją zewnętrzną jest $g(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, a funkcją wewnętrzną $f(x) = 3x^2 + x + 1$. Pochodne tych funkcji są równe: $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(x) = 6x + 1$. Zatem $(\sqrt{3x^2 + x + 1})' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + x + 1}} \cdot (6x + 1)$.

25. Twierdzenie. Niech $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ będzie ciągłą funkcją różnowartościową przekształcającą (a, b) na (c, d) , która ma pochodną w punkcie $x \in (a, b)$ i to różną od 0. Wtedy funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $f(x)$ oraz $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

26. Przykład. Funkcja tangens traktowana jako funkcja $\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ma funkcję odwrotną arcus tangens, $\text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Mamy wtedy równość $\text{arctg}(\text{tg}(x)) = x$ dla każdego $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Różniczkując ją stronami ze względu na zmienną x otrzymujemy równość $\text{arctg}'(\text{tg}(x)) \cdot \text{tg}'(x) = 1$, zatem $\text{arctg}'(\text{tg}(x)) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 1$. Wynika z niej, że $\text{arctg}'(\text{tg} x) = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$. Podstawiając $t = \text{tg} x$ otrzymujemy równość $\text{arctg}'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, w której możemy zmienić t na x i dostać $\text{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

27. Przykład. Funkcja sinus traktowana jako funkcja $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ma funkcję odwrotną arcus sinus, $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oraz $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Sprawdzenie zostawiam jako ćwiczenie.