

1. Definicja (Heinego granicy funkcji w punkcie). Niech $a < x_0 < b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech f oznacza funkcję określoną na zbiorze zawierającym $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Niech g będzie liczbą rzeczywistą lub jednym z symboli $-\infty, +\infty$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) punktów $x_n \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ zbieżnego do x_0 zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$. Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$.
2. Uwaga. Funkcja f może (ale nie musi) być określona w punkcie x_0 . Nawet jeśli f ma wartość w punkcie x_0 , to ta wartość nie ma wpływu na jej granicę, bo w definicji granicy rozpatrujemy tylko ciągi o wyrazach różnych od x_0 .
3. Przykład. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x + 4}{x^2 + x} = 3$, bo dla dowolnego ciągu punktów $x_n \neq 2$ zbieżnego do 2, ciąg $\frac{2x_n^3 - x_n + 4}{x_n^2 + x_n}$ ma granicę 3 (por. tw. o operacjach algebraicznych dla ciągów).
4. Przykład. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{\sqrt{x} - 2} = 28$, bo dla dowolnego ciągu punktów $x_n \neq 4$ zbieżnego do 4, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - x_n - 12}{\sqrt{x_n} - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 4)(x_n + 3)(\sqrt{x_n} + 2)}{x_n - 4} = 28$.
5. Przykład. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, bo dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\sqrt{1 - x^2} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, zatem dla dowolnego ciągu $x_n \rightarrow 0$ o wyrazach różnych od 0, począwszy od pewnego miejsca, zachodzą nierówności $\sqrt{1 - x_n^2} \leq \frac{\sin x_n}{x_n} \leq 1$, z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że $\frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1$.
6. Definicja (Heinego granicy funkcji w nieskończoności). Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech f oznacza funkcję określoną na zbiorze zawierającym przedział $(a, +\infty)$. Niech g będzie liczbą rzeczywistą lub jednym z symboli $-\infty, +\infty$. Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ granicę równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) punktów $x_n \in (a, \infty)$ rozbieżnego do $+\infty$ zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$. Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$.
7. Przykład. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{x + 4} = -2$, bo dla dowolnego ciągu $x_n \rightarrow \infty$ o wyrazach różnych od -4 , z twierdzenia o operacjach algebraicznych wynika więc, że $\frac{3 - 2x_n}{x_n + 4} \rightarrow -2$.
8. Definicja (Heinego granicy funkcji w minus nieskończoności). Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech f oznacza funkcję określoną na zbiorze zawierającym przedział $(-\infty, a)$. Niech g będzie liczbą rzeczywistą lub jednym z symboli $-\infty, +\infty$. Mówimy, że funkcja f ma w $-\infty$ granicę równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) punktów $x_n \in (-\infty, a)$ rozbieżnego do $-\infty$ zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$. Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$.

Granicę funkcji można określić inaczej. Poniżej podaję tylko przypadek szczególny granicy właściwej w punkcie. W podobny sposób można zdefiniować granice w innych przypadkach.

9. Twierdzenie (definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie). Niech $a < x_0 < b$ oraz g będą liczbami rzeczywistymi i niech f oznacza funkcję określoną na zbiorze zawierającym $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Przy tych założeniach $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_x [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon]$.

W poniższym twierdzeniu, analogicznym do twierdzenia dla ciągów, stosujemy umowę dotyczącą działań na symbolach nieskończonych.

10. Twierdzenie (o nierównościach i działaniach algebraicznych na granicach). Niech $a < x_0 < b$ będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że funkcje f, g, h są określone na zbiorze A zawierającym $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Wtedy:
 - a) Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = d$ oraz $\forall_{x \in A} f(x) \leq g(x)$, to $c \leq d$.
 - b) Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ i $\forall_{x \in A} f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$.
 - c) Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 i nie jest prawdą, że jedna z granic $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

jest równa $+\infty$, a druga $-\infty$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

d) Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 i nie jest prawdą, że jedna z granic $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ jest równa 0, a druga $+\infty$ lub $-\infty$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

e) Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ i co najwyżej jedna z granic $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ jest nieskończona, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

11. Twierdzenie (ważne nierówności). a) Zachodzą nierówności: $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$: lewa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, prawa dla $x < 1$. b) Dla wszystkich $x > -1$ zachodzą nierówności: $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Dowód. a) Dla $x \leq -1$ lewa strona jest niedodatnia, a środkowa (czyli e^x) dodatnia, zatem lewa nierówność jest prawdziwa. Dla $x > -1$ ciąg $((1 + \frac{x}{n})^n)$ jest rosnący, więc jego granica e^x jest większa od pierwszego wyrazu $1 + x$. Zatem nierówność $1 + x \leq e^x$ zachodzi dla wszystkich liczb $x \in \mathbb{R}$. Gdy wstawimy do niej $-x$ zamiast x , otrzymamy $1 - x \leq e^{-x}$, tzn. $1 - x \leq \frac{1}{e^x}$. Dla $x < 1$ ta nierówność jest równoważna z $e^x \leq \frac{1}{1-x}$. Prawa nierówność z punktu a) jest więc udowodniona. b) Logarytmując stronami nierówności $1 + x \leq e^x$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ otrzymujemy nierówności $\ln(1+x) \leq x$, $x \leq \ln \frac{1}{1-x}$ (zwrot się zachował, bo logarytm naturalny jest funkcją rosnącą). Lewa z otrzymanych nierówności daje prawą nierówność z punktu b). W prawej zastosujemy takie podstawienie, żeby $1 + y = \frac{1}{1-x}$. To jest równoważne z $x = \frac{y}{1+y}$. Otrzymujemy więc $\frac{y}{1+y} \leq \ln(1+y)$. Zmieniamy w niej y na x i dostajemy lewą nierówność z punktu b).

12. Twierdzenie (o ważnych granicach). a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

13. Przykład. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^1 = e$, bo $x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$. Skorzystaliśmy tu z ważnej granicy c) (bo $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow \infty$) oraz ciągłości funkcji wykładniczej e^x (o której będzie mowa na następnym wykładzie).

14. Przykład. Niech $a > 0, a \neq 1$. Wtedy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a$.

15. Przykład. Niech $a > 0, a \neq 1$. Wtedy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{(\ln a)x} = \frac{1}{\ln a}$.

16. Przykład. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln 2} - 1}{\frac{1}{n} \ln 2} \ln 2 = \ln 2$, bo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \ln 2 = \ln 2$.

17. Definicja. Niech $x_0 < b$ będą liczbami rzeczywistymi, niech f oznacza funkcję określoną na zbiorze zawierającym (x_0, b) oraz niech g oznacza liczbę lub jeden z symboli $-\infty, +\infty$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 prawostronną granicę równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów $x_n \in (x_0, b)$ zbieżnego do x_0 zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$. Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = g$.

18. Definicja. Niech $a < x_0$ będą liczbami rzeczywistymi, niech f oznacza funkcję określoną na zbiorze zawierającym (a, x_0) oraz niech g oznacza liczbę lub jeden z symboli $-\infty, +\infty$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 lewostronną granicę równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów $x_n \in (a, x_0)$ zbieżnego do x_0 zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$. Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = g$.

19. Przykład. $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{4x}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{4x}{x-1} = +\infty$.

20. Twierdzenie (o granicach jednostronnych). Niech $a < x_0 < b$ będą liczbami rzeczywistymi, niech f oznacza funkcję określoną na zbiorze zawierającym $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ oraz niech g oznacza dowolną liczbę lub symbol $+\infty$ lub $-\infty$. Wtedy funkcja f ma granicę w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne w punkcie x_0 istnieją i są równe: $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$.

21. Przykład. Granica $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x}$ nie istnieje, bo $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$, a $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$ i te granice jednostronne są różne.
22. Definicja. Prosta o równaniu $x = c$ nazywa się asymptotą pionową wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z granic jednostronnych funkcji f w punkcie c jest równa $+\infty$ lub $-\infty$.
23. Przykład. Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz funkcji $g(x) = \ln x$.
24. Definicja. Prosta o równaniu $y = ax + b$ nazywa się asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $+\infty$, gdy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.
25. Definicja. Prosta o równaniu $y = ax + b$ nazywa się asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $-\infty$, gdy $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.
26. Twierdzenie. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$.
27. Przykład. Znajdziemy asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2+x+1}{|x|+1}$. Obliczamy $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{x(|x|+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+x} = 1$ oraz $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2+x+1}{|x|+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2+x+1}{x+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2+x+1 - x(x+1)}{x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2+x+1 - x^2 - x}{x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x+1}) = 0$. Zatem prosta o równaniu $y = x$ jest asymptotą wykresu funkcji $f(x)$ w $+\infty$. Następnie w ten sam sposób znajdziemy asymptotę w $-\infty$. Obliczamy $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{x(-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{-x^2+x} = -1$ oraz $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x^2+x+1}{-x+1} + x) = -2$. Zatem prosta o równaniu $y = -x + 2$ jest asymptotą wykresu funkcji $f(x)$ w $-\infty$.
28. Uwaga. Szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej jest asymptota pozioma. Prosta o równaniu $y = b$ jest asymptotą wykresu funkcji f w $+\infty$ (odpowiednio w $-\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (odp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$).
29. Przykład. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$ określonej na zbiorze $(0, e) \cup (e, +\infty)$ ma asymptotę poziomą o równaniu $y = -1$, bo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = -1$.