

## 1. Alfabet grecki:

$\alpha$ -alfa,  $\beta$ -beta,  $\gamma$ -gamma,  $\delta$ -delta,  $\varepsilon$ -epsilon,  $\zeta$ -dzeta,  $\eta$ -eta,  $\vartheta$ -teta,  $\iota$ -jota,  $\kappa$ -kappa,  $\lambda$ -lambda,  $\mu$ -mi,  $\nu$ -ni,  $\xi$ -ksi,  $\omicron$ -omikron,  $\pi$ -pi,  $\rho$ -ro,  $\sigma$ -sigma,  $\tau$ -tau,  $\upsilon$ -ypsilon,  $\varphi$ -fi,  $\chi$ -chi,  $\psi$ -psi,  $\omega$ -omega.

Uwaga. Jeśli litera sigma występuje na końcu wyrazu, to pisze się ją tak:  $\varsigma$ .

2. Definicja. Niech  $(a_n)$  będzie dowolnym ciągiem. Wyrażenie  $a_1 + a_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nazywa się szeregiem, a liczby  $a_1, a_2, \dots$  wyrazami tego szeregu. Sumy  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \dots$  nazywają się sumami częściowymi szeregu. Jeśli istnieje skończona (tzn. będąca liczbą)

granica  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , to szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nazywa się zbieżny, a liczba  $S$  nazywa się sumą tego szeregu.

Piszemy wtedy  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ . Jeśli ciąg  $(S_n)$  nie ma skończonej granicy, to szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nazywa się rozbieżny.

3. Przykład. Jeśli  $|q| < 1$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$  oraz  $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ .

4. Twierdzenie. Pominięcie lub dopisanie skończenie wielu wyrazów na początku szeregu nie zmienia jego zbieżności.

5. Twierdzenie. Warunek konieczny zbieżności szeregu. Jeśli szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  jest zbieżny, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

6. Przykład. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{2n+1}$  jest rozbieżny, bo ciąg jego wyrazów nie ma granicy (więc w szczególności nie dąży do 0).

7. Twierdzenie. Szereg o nieujemnych wyrazach jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego ciąg sum częściowych jest ograniczony.

8. Przykład. Szereg harmoniczny  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  jest rozbieżny.

9. Twierdzenie (Kryterium porównawcze 1). Jeśli istnieje taka liczba  $n_0$ , że dla wszystkich  $n \geq n_0$  zachodzą nierówności  $0 \leq a_n \leq b_n$ , to ze zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  wynika zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , a z rozbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wynika rozbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

10. Przykład. Szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  są zbieżne.

11. Przykład. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$  jest zbieżny.

12. Twierdzenie. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $a > 1$ .

13. Twierdzenie (Kryterium porównawcze 2). Jeśli  $a_n \geq 0, b_n > 0$  dla wszystkich  $n \geq n_0$  oraz istnieje skończona i różna od zera granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ , to szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  są oba zbieżne lub oba rozbieżne.

14. Przykład. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 - (-1)^n n}$  jest zbieżny.

15. Twierdzenie (Kryterium d'Alemberta). Załóżmy, że wszystkie wyrazy  $a_n$  są dodatnie oraz istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ . Jeśli  $\lambda < 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, a jeśli  $\lambda > 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny.
16. Przykład. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  jest zbieżny, a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$  jest rozbieżny.
17. Twierdzenie (Kryterium Cauchy'ego). Załóżmy, że wszystkie wyrazy  $a_n$  są nieujemne oraz istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ . Jeśli  $\lambda < 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, a jeśli  $\lambda > 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny.
18. Przykład. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left( \frac{3n+2}{4n+3} \right)^n$  jest zbieżny, a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n+5} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$  jest rozbieżny.
19. Uwaga. Jeśli liczba  $\lambda$  z kryterium d'Alemberta lub z kryterium Cauchy'ego jest równa 1, to szereg może być zbieżny i może być rozbieżny. Na przykład, szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  jest zbieżny, a szereg harmoniczny  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  jest rozbieżny.
20. Definicja. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nazywa się zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .
21. Twierdzenie. Każdy szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.
22. Twierdzenie. Jeśli w szeregu zbieżnym bezwzględnie zmienimy porządek wyrazów, to otrzymamy szereg zbieżny bezwzględnie do tej samej sumy.
23. Twierdzenie (Kryterium Leibniza). Jeśli ciąg  $(a_n)$  jest nierosnący i zbieżny do 0, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  jest zbieżny.
24. Definicja. Szereg zbieżny, ale nie zbieżny bezwzględnie nazywa się szeregiem zbieżnym warunkowo.
25. Przykład. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  jest zbieżny warunkowo.
26. Twierdzenie Riemanna. Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny warunkowo, to dla dowolnej liczby  $A \in \mathbb{R}$  istnieje taka permutacja wyrazów tego szeregu, że otrzymany szereg ma sumę  $A$ .