

1. Zasady zaliczania przedmiotu, terminy konsultacji oraz notatki z wykładów i zadania znajdują się na stronie www.mimuw.edu.pl/~konarski/kognitywistyka. Na wszelkie pytania oraz prośby o wskazówki do zadań domowych czekam pod adresem: konarski@mimuw.edu.pl
2. Definicja. Zbiorem liczb naturalnych na tych zajęciach będziemy nazywać zbiór liczb całkowitych dodatnich, tzn. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
3. Definicja. Ciągami nieskończonymi nazywamy dowolną funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych, tzn. przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej pewnej liczby rzeczywistej. Ciągami skończonymi nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych postaci $\{1, 2, \dots, k\}$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{N}$.
4. Uwaga. Wartość ciągu a w punkcie $n \in \mathbb{N}$ nazywa się n -tym wyrazem ciągu i jest zwykle oznaczana symbolem a_n . Sam ciąg oznacza się często symbolem (a_n) .
5. Definicja. Ciąg (a_n) nazywa się ciągiem rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$. Podobnie określa się ciąg malejący, nierosnący oraz niemalejący. Każdy ciąg, który jest nierosnący lub niemalejący, nazywa się ciągiem monotonicznym.
6. Definicja. Ciąg (a_n) nazywa się ciągiem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby $a, b \in \mathbb{R}$, że każdy wyraz a_n spełnia nierówność $a \leq a_n \leq b$.
7. Przykład. Niech $a_n = 2^n$, $b_n = \frac{-3n}{n+1}$, $c_n = 5 + (-1)^n$, $d_n = \pi$, $e_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{n}$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciągi (a_n) oraz (f_n) są rosnące, ciąg (b_n) jest malejący, ciąg (d_n) jest stały. Pozostałe z podanych ciągów nie są monotoniczne.
8. Definicja. Liczba g nazywa się granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna n_0 , że dla wszystkich $n > n_0$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Piszemy wtedy $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
9. Definicja. Jeśli istnieje taka liczba g , że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, to ciąg (a_n) nazywa się ciągiem zbieżnym, w przeciwnym razie nazywa się ciągiem rozbieżnym.
10. Przykład. Sprawdźmy, posługując się definicją, że ciąg $(\frac{1}{n})$ ma granicę 0. Nierówność $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $n > \frac{1}{\varepsilon}$, zatem wystarczy przyjąć jako n_0 w definicji granicy ciągu dowolną liczbę naturalną większą od $\frac{1}{\varepsilon}$. Wtedy dla wszystkich liczb $n > n_0$ nierówność $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ zachodzi, czyli warunek z definicji granicy jest spełniony.
11. Przykład. Ciąg $(\frac{-3n}{n+1})$ ma granicę -3 , ciąg (π) ma granicę π , a ciągi $(5 + (-1)^n)$, $(\frac{n}{4} + \frac{1}{n})$ oraz (2^n) są rozbieżne.
12. Twierdzenie. Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny ciąg powstały z ciągu (a_n) przez usunięcie skończenie wielu początkowych wyrazów.
13. Twierdzenie. Każdy ciąg ma co najwyżej jedną granicę.
14. Twierdzenie. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.
15. Przykład. Ciągi $(\frac{-3n}{n+1})$ oraz $(5 + (-1)^n)$ są ograniczone, a ciąg (2^n) nie jest ograniczony.
16. Twierdzenie o operacjach algebraicznych na ciągach. Załóżmy, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i że $c \in \mathbb{R}$. Wtedy ciągi (a_{n+1}) , $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$, (ca_n) , $(|a_n|)$ są zbieżne oraz:

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n, \quad \lim(ca_n) = c \cdot \lim a_n, \quad \lim |a_n| = |\lim a_n|,$$

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n, \quad \lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n,$$
 Ponadto, jeśli wszystkie wyrazy ciągu (b_n) oraz jego granica są różne od 0, to ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest zbieżny oraz $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$. Wreszcie, jeśli dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$, to także $\lim a_n \leq \lim b_n$.

17. Twierdzenie. Jeśli m jest dowolną liczbą rzeczywistą, a ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest zbieżny do granicy g , to ciąg (a_n^m) jest zbieżny do granicy g^m .
18. Przykład. Ciąg $(\sqrt[3]{\frac{3n}{n+1}})$ ma granicę $\sqrt[3]{3}$.
19. Twierdzenie o trzech ciągach. Załóżmy, że wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) spełniają warunek $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz, że ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g . Wtedy ciąg (b_n) też jest zbieżny do granicy g .
Dowód. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, więc dla wszystkich n większych od pewnej liczby n'_0 zachodzą nierówności $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$. Podobnie, dla wszystkich n większych od pewnej liczby n''_0 zachodzą nierówności $g - \varepsilon < c_n < g + \varepsilon$. Oznaczmy przez n_0 większą z liczb n'_0, n''_0 (tzn. niech $n_0 = \max(n'_0, n''_0)$). Wtedy dla wszystkich liczb n większych od n_0 zachodzą nierówności $g - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g + \varepsilon$, z których wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.
20. Przykład. Ciąg $(\frac{n+\sin n}{3n+1})$ jest zbieżny do liczby $\frac{1}{3}$, bo dla wszystkich liczb naturalnych n zachodzą nierówności $\frac{n-1}{3n+1} \leq \frac{n+\sin n}{3n+1} \leq \frac{n+1}{3n+1}$, a oba ciągi $(\frac{n-1}{3n+1})$, $(\frac{n+1}{3n+1})$ mają granicę $\frac{1}{3}$.
21. Wniosek 1. Jeśli $a > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
Dowód. Załóżmy najpierw, że $a \geq 1$. Skorzystamy z następującej nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną: dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \dots, a_n$ zachodzi nierówność $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, a równość ma miejsce jedynie wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Mianowicie, zastosujemy tę nierówność do liczb $a, 1, \dots, 1$ (tzn. do układu złożonego z liczby a oraz $n-1$ jedynek). Otrzymujemy $\frac{1}{n}(a + n - 1) \geq \sqrt[n]{a}$, mamy więc nierówności $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \frac{1}{n}(a + n - 1)$, a ponieważ ciąg $(\frac{1}{n}(a + n - 1))$ ma granicę 1, z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Załóżmy teraz, że $0 < a < 1$. Wtedy liczba $b = \frac{1}{a}$ jest większa od 1, więc z udowodnionego powyżej przypadku wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1$.
22. Wniosek 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Dowód (podobny do powyższego) zostawiam jako ćwiczenie.
23. Definicja. Jeśli (n_k) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, a (a_n) ciągiem liczbowym, to ciąg (a_{n_k}) nazywa się podciągiem ciągu (a_n) .
24. Uwaga. Podciąg danego ciągu (a_n) , to ciąg otrzymany z ciągu (a_n) przez skreślenie pewnych jego wyrazów i pozostawienie pozostałych w niezmiennym porządku.
25. Przykład. Dla dowolnego ciągu (a_n) jego podciągami są ciągi (a_{2n}) oraz (a_{2n-1}) złożone z wyrazów ciągu (a_n) o numerach parzystych i nieparzystych odpowiednio.
26. Twierdzenie. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g , to każdy jego podciąg też jest zbieżny do g .
27. Przykład. Ciąg (a_n) , $a_n = 5 + (-1)^n$ jest rozbieżny, bo dwa jego podciągi mają różne granice: podciąg (a_{2n}) ma granicę 6, a podciąg (a_{2n-1}) ma granicę 4.
28. Twierdzenie. Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.
29. Wniosek. Jeśli $|a| < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.
30. Przykład. Niech $a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg (a_n) jest od pewnego miejsca malejący i ograniczony (więc zbieżny do pewnej granicy g) oraz zachodzi równość $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+1}{2n+3}$ dla wszystkich n . Zatem $g = \frac{1}{2}g$, więc $g = 0$. Uwaga: $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)$.
31. Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa. Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.

32. Twierdzenie. Ciąg $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ jest rosnący i ograniczony, a więc zbieżny. Jego granica $e = 2,718281828459045\dots$ jest liczbą niewymierną. Prawdziwe są ogólniejsze twierdzenia:
33. Twierdzenie. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do 0, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{1/a_n} = e$.
34. Twierdzenie. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
35. Twierdzenie. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$.
36. Definicja. Ciąg (a_n) nazywa się rozbieżny do $+\infty$, jeśli dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje taka liczba naturalna n_0 , że dla wszystkich $n > n_0$ zachodzi nierówność $a_n > M$. Piszemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.
37. Definicja. Ciąg (a_n) nazywa się rozbieżny do $-\infty$, jeśli dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje taka liczba naturalna n_0 , że dla wszystkich $n > n_0$ zachodzi nierówność $a_n < M$. Piszemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.
38. Twierdzenie. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, to:
- ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu,
 - ciąg $(-a_n)$ jest rozbieżny do $-\infty$,
 - dla dowolnej liczby $c > 0$ ciąg (ca_n) jest rozbieżny do $+\infty$,
 - jeśli $a_n \neq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$,
 - jeśli $b_n \geq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ (tw. o dwóch ciągach).
39. Twierdzenie. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|b_n|} = +\infty$.
40. Umowa:
- | | |
|--|--|
| $(+\infty) + (+\infty) = +\infty,$ | $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$ |
| $(-\infty) + (-\infty) = -\infty,$ | $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$ |
| $c \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot c = +\infty$ dla $c > 0,$ | $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = -\infty$ dla $c > 0,$ |
| $c \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot c = -\infty$ dla $c < 0,$ | $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = +\infty$ dla $c < 0,$ |
| $1/(+\infty) = 1/(-\infty) = 0,$ | $-\infty < c < +\infty$ dla $c \in \mathbb{R},$ |
| | $-\infty < +\infty.$ |
41. Uwaga. Twierdzenie o operacjach algebraicznych na ciągach można teraz rozszerzyć na przypadek ciągów rozbieżnych do granic nieskończonych.
42. Uwaga. Nie określamy działań: $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, $(+\infty) + (-\infty)$, $\frac{+\infty}{+\infty}$ itp., bo nie da się ich określić tak, żeby twierdzenie o operacjach algebraicznych pozostało prawdziwe.
43. Twierdzenie. Niech $a > 1$ i $c > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Wtedy:
- $$\lim n^c = +\infty, \quad \lim a^n = +\infty, \quad \lim \frac{n^c}{a^n} = 0, \quad \lim \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim \frac{\log_a n}{n} = 0.$$
- Dowód. Dwie pierwsze równości oraz ostatnia wynikają bezpośrednio z definicji. Dowód trzeciej. Najpierw sprawdzimy, czy ciąg $\left(\frac{n^c}{a^n}\right)$ jest malejący: $\frac{(n+1)^c}{a^{n+1}} < \frac{n^c}{a^n} \iff \frac{(n+1)^c}{n^c} < a \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^c < a$ (*). Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^c = 1$, a $a > 1$, to począwszy od pewnej liczby naturalnej n_0 nierówność (*) jest spełniona. Oznacza to, że od pewnego miejsca ciąg $\left(\frac{n^c}{a^n}\right)$ jest malejący. Jest on ograniczony z dołu, a więc zbieżny (tw. 27). Oznaczmy jego granicę przez g . W równości $\frac{(n+1)^c}{a^{n+1}} = \frac{(n+1)^c}{a \cdot n^c} \cdot \frac{n^c}{a^n}$ lewa strona dąży do g , a prawa do $\frac{1}{a} \cdot g$. Zatem $g = \frac{1}{a} \cdot g$, a więc $g = 0$ (bo $a \neq 1$). Podobnie dowieść można czwartą równość.