

U góry na każdej kartce napisz swoje imię, nazwisko oraz literę N.

Pisz czytelnie i jasno. Uzasadniaj swoje stwierdzenia. Załączaj rachunki.

1. (8p.) Niech $a_n = \sqrt{n^4 + 4} - n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Znajdź granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ lub wykaż, że ta granica nie istnieje.

(b) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

(d) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$.

2. (26p.) Niech $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$.

(a) Znajdź granice funkcji f na krańcach przedziałów (lub przedziału) określoności.

(b) Napisz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji f .

(c) Oblicz pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcji f i wypełnij tabelkę zmienności.

(d) Naskicuj część wykresu funkcji f zawartą w kwadracie $\{(x, y) : -1 \leq x, y \leq e\}$.

Możesz skorzystać z przybliżeń $e^{-1} \simeq 0.37$, $e^{-1/2} \simeq 0.61$, $e^{1/2} \simeq 1.65$, $e \simeq 2.72$, $e^2 \simeq 7.39$.

(e) Napisz równanie prostej p stycznej do wykresu funkcji f w jego punkcie przegięcia.

(f) Oblicz pole powierzchni obszaru ograniczonego od dołu osią odciętych, a od góry wykresem i prostą p .

(g) Wykaż, że dla dowolnych liczb u, w takich, że $1 \leq u < w$, zachodzi nierówność $\frac{2 + \ln u}{2 + \ln w} > \frac{u}{w}$.

3. (7p.) Dwa wysokie budynki o pionowych ścianach stoją w pewnej odległości naprzeciwko siebie. Na ścianie pierwszego budynku w punkcie A na wysokości 10 metrów nad ziemią przyczepiono nitkę długości 20 metrów, której drugi koniec jest umocowany w punkcie B naprzeciwko u podnóża ściany drugiego budynku. Od B do A wspina się po nitce żuk z prędkością jednego metra na minutę. U podnóża ściany pierwszego budynku dokładnie pod punktem A świeci żarówka.

(a) Oblicz położenie i prędkość poruszania się cienia żuka na ścianie drugiego budynku w t minut po wyruszeniu żuka z punktu B .

(b) W którym miejscu znajduje się żuk, gdy prędkość jego cienia jest osiem razy większa od prędkości żuka?

4. (3p.) Znajdź wszystkie punkty stacjonarne funkcji $f(x, y) = y^3 + x^2 - 3y$ i zbadaj, w których z nich f ma ekstrema lokalne (i jakie), a które są punktami siodłowymi.

5. (6p.) Znajdź przynajmniej jedno maksimum lokalne i przynajmniej jedno minimum lokalne funkcji $F(x, y) = 4x - xy^2$ na okręgu G opisanym równaniem $x^2 + y^2 = 4$.

U góry na każdej kartce napisz swoje imię, nazwisko oraz literę N.

Pisz czytelnie i jasno. Uzasadniaj swoje stwierdzenia. Załączaj rachunki.

1. (14p.) Dane są macierze $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ -a & -2a & -1 \\ 2-a & 2 & a \end{pmatrix}$, $B_a = \begin{pmatrix} 2a-2 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (a) Zbadaj, ile rozwiązań ma równanie macierzowe $A_a \cdot X = B_a$ w zależności od wartości parametru a .
 - (b) Podaj rozwiązanie ogólne w przypadku, w którym więcej niż jedna macierz X spełnia dane równanie.
 - (c) Dla tej wartości parametru a , dla której zbiór rozwiązań jest przestrzenią liniową, znajdź bazę ortogonalną tej przestrzeni.
2. (7p.) Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow M(2 \times 2)$ dane jest wzorem $f(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a+c & a+b \\ a+b & a+c \end{pmatrix}$ dla dowolnego wielomianu $ax^2 + bx + c$ oraz $A : 1, x, x^2$ oznaczają bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$, a $B : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bazę przestrzeni $M(2 \times 2)$.
- (a) Znajdź bazę jądra przekształcenia f .
 - (b) Znajdź wymiar obrazu przekształcenia f .
 - (c) Znajdź macierz $M(f)_A^B$.
3. (11p.) Macierz endomorfizmu $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazie standardowej jest równa $M = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 41 & -24 & 12 \\ -24 & -23 & 36 \\ 12 & 36 & 31 \end{pmatrix}$.
- Dane są też wektory $t = (3, 2, 6), u = (-6, 3, 2), v = (6, 3, 2), w = (2, 6, -3) \in \mathbb{R}^3$.
- (a) Dla każdego z wektorów t, u, v, w zbadaj, czy jest wektorem własnym macierzy M , a jeśli tak, to jakiej wartości własnej odpowiada.
 - (b) Wybierz spośród wektorów t, u, v, w bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Znajdź macierz g w wybranej bazie ortonormalnej.
 - (d) Opisz sens geometryczny przekształcenia g .
4. (12p.) Dany jest wektor $w = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) \in \mathbb{R}^3$.
- (a) Znajdź długość wektora w .
 - (b) Dopełnij w do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożonej z wektorów tej samej długości.
 - (c) Znajdź macierz rzutu prostopadłego π na płaszczyznę $w^\perp$ (prostopadłą do w) w znalezionej bazie.
 - (d) Znajdź macierz rzutu π w bazie standardowej.
5. (6p.) Niech A oznacza dowolną macierz kwadratową.
- (a) Zbadaj, czy każdy wektor własny macierzy A jest również wektorem własnym macierzy A^3 .
 - (b) Zbadaj, czy każdy wektor własny macierzy A^3 jest również wektorem własnym macierzy A .