

U góry na każdej kartce napisz swoje imię, nazwisko oraz literę N.

Pisz czytelnie i jasno. Uzasadniaj swoje stwierdzenia. Załączaj rachunki.

1. (8p.) Niech $a_n = \sqrt{n^4 + 4} - n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Znajdź granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ lub wykaż, że ta granica nie istnieje.

(b) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

(d) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$.

Rozwiązanie.

(a) $\sqrt{n^4 + 4} - n^2 = \frac{(\sqrt{n^4 + 4} - n^2)(\sqrt{n^4 + 4} + n^2)}{\sqrt{n^4 + 4} + n^2} = \frac{4}{\sqrt{n^4 + 4} + n^2} \rightarrow 0$, bo licznik jest stały, a mianownik dąży do nieskończoności.

(b) Niech $b_n = \frac{1}{n^2}$. Wtedy $\frac{a_n}{b_n} = \frac{4n^2}{\sqrt{n^4 + 4} + n^2} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} + 1} \rightarrow 2$. Ta granica jest liczbą różną od zera, zatem z drugiego kryterium porównawczego wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(c) I sp. Wyrazy a_n są dodatnie, zatem $a_n = |(-1)^n a_n|$. Powyżej wykazaliśmy, że szereg modułów $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n|$ jest zbieżny, zatem jest też zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. II sp. Teza wynika z kryterium Leibniza: Ciąg (a_n) maleje, bo licznik jest stały, a mianownik $\sqrt{n^4 + 4} + n^2$ rośnie (a licznik i mianownik są dodatnie) oraz jest ograniczony z dołu przez liczbę 0. Zatem z kryterium Leibniza wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

(d) Niech $c_n = \frac{1}{n}$, wtedy $\frac{na_n}{c_n} = \frac{4n^2}{\sqrt{n^4 + 4} + n^2} \rightarrow 2$ (znaleźliśmy tę granicę już wyżej). Jest ona liczbą różną od zera, szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc z I kryterium porównawczego wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ jest rozbieżny.

2. (26p.) Niech $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$.

(a) Znajdź granice funkcji f na krańcach przedziałów (lub przedziału) określoności.

(b) Napisz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji f .

(c) Oblicz pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcji f i wypełnij tabelkę zmienności.

(d) Naszkicuj część wykresu funkcji f zawartą w kwadracie $\{(x, y) : -1 \leq x, y \leq e\}$.

Możesz skorzystać z przybliżeń $e^{-1} \simeq 0.37, e^{-1/2} \simeq 0.61, e^{1/2} \simeq 1.65, e \simeq 2.72, e^2 \simeq 7.39$.

(e) Napisz równanie prostej p stycznej do wykresu funkcji f w jego punkcie przegięcia.

(f) Oblicz pole powierzchni obszaru ograniczonego od dołu osią odciętych, a od góry wykresem i prostą p .

(g) Wykaż, że dla dowolnych liczb u, w takich, że $1 \leq u < w$, zachodzi nierówność $\frac{2 + \ln u}{2 + \ln w} > \frac{u}{w}$.

Rozwiązanie.

(a) Dziedziną funkcji f jest przedział $D = (0, +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2 + \ln x}{x} = -\infty$, bo licznik dąży do $-\infty$, a mianownik dąży do zera od strony dodatniej. (Stosowanie reguły de l'Hospitala w tym miejscu jest błędem, bo jej założenie nie jest spełnione – można ją stosować tylko do przypadków $\left[\frac{*}{*}\right]$ i $\left[\frac{0}{0}\right]$). $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \ln x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

(b) Z punktu (a) wynika, że są dwie asymptoty: pionowa o równaniu $x = 0$ oraz pozioma w $+\infty$ (która jest szczególnym przypadkiem ukośnej) o równaniu $y = 0$.

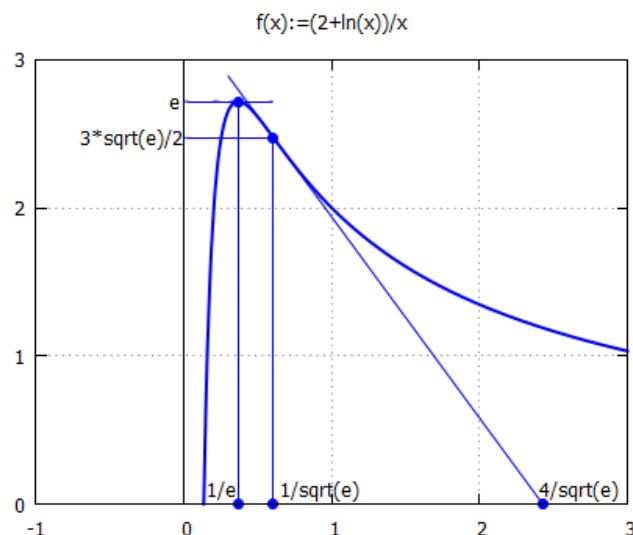
(c) Obliczamy pochodne: $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{1+2\ln x}{x^3}$.

Badamy, gdzie przyjmują wartości dodatnie: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1+\ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln(e^{-1}) \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1} \Leftrightarrow x \in (0, \frac{1}{e})$;

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+2\ln x}{x^3} > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1/2} \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$.

Wypełniamy tabelkę:

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	$-\frac{e}{2}$	-
$f''(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	$\curvearrowright$	e	$\curvearrowleft$	$\frac{3\sqrt{e}}{2}$	$\curvearrowright$



(d) Korzystając z tabelki szkicujemy wykres:

(e) Ponieważ punkt przegięcia wykresu ma współrzędne $(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{3\sqrt{e}}{2})$, a $f'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{e}{2}$, to styczna ma równanie $y = -\frac{e}{2}(x - \frac{1}{\sqrt{e}}) + \frac{3\sqrt{e}}{2} = -\frac{ex}{2} + 2\sqrt{e}$ i jest wykresem funkcji $l(x) = -\frac{ex}{2} + 2\sqrt{e}$.

(f) Chodzi o obszar ograniczony z góry zarówno wykresem, jak i znaną styczną, to znaczy o obszar położony zarówno pod wykresem, jak i pod styczną. Wykres i styczna przecinają się w punkcie przegięcia o odciętej $\frac{1}{\sqrt{e}}$. Znajdujemy odcięte punktu przecięcia wykresu z osią odciętych: $x = \frac{1}{e^2}$ i punktu przecięcia stycznej z osią odciętych: $x = \frac{4}{\sqrt{e}}$. Dla wygody na powyższym rysunku styczna w punkcie przegięcia jest naszkicowana aż do przecięcia z osią odciętych. Zatem nasz obszar składa się z dwóch części; jednej pod wykresem na przedziale $[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{\sqrt{e}}]$ i drugiej pod styczną na przedziale $[\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{4}{\sqrt{e}}]$, a jego pole jest równe $P = \int_{1/e^2}^{1/\sqrt{e}} f(x)dx + \int_{1/\sqrt{e}}^{4/\sqrt{e}} l(x)dx = \int_{1/e^2}^{1/\sqrt{e}} \frac{2+\ln x}{x}dx + \int_{1/\sqrt{e}}^{4/\sqrt{e}} \frac{-ex}{2} + 2\sqrt{e}dx = (2\ln x + \frac{\ln^2 x}{2})|_{1/e^2}^{1/\sqrt{e}} + (-\frac{ex^2}{4} + 2x\sqrt{e})|_{1/\sqrt{e}}^{4/\sqrt{e}} = 3 - \frac{15}{8} + 2 + \frac{1}{4} = 3\frac{3}{8}$.

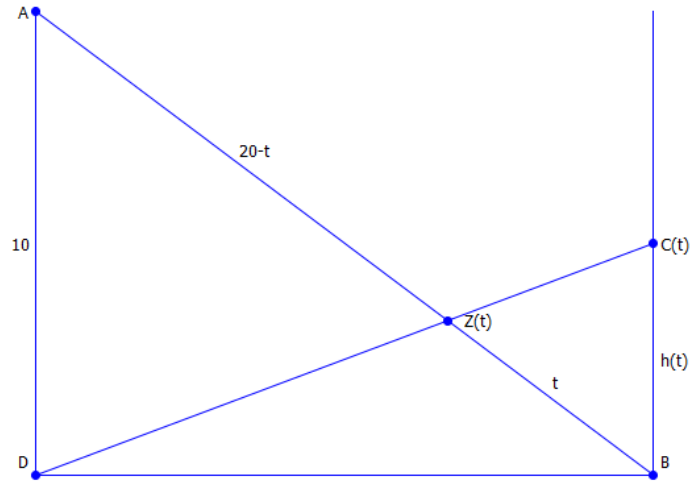
(g) Dana nierówność jest równoważna z nierównością $f(u) > f(w)$ i jest prawdziwa, bo funkcja f maleje na $[1, +\infty)$ (zob. tabela zmienności lub wykres).

3. (7p.) Dwa wysokie budynki o pionowych ścianach stoją w pewnej odległości naprzeciwko siebie. Na ścianie pierwszego budynku w punkcie A na wysokości 10 metrów nad ziemią przyczepiono nitkę długości 20 metrów, której drugi koniec jest umocowany w punkcie B naprzeciwko u podnóża ściany drugiego budynku. Od B do A wspina się po nitce żuk z prędkością jednego metra na minutę. U podnóża ściany pierwszego budynku dokładnie pod punktem A świeci żarówka.

- (a) Oblicz położenie i prędkość poruszania się cienia żuka na ścianie drugiego budynku w t minut po wyruszeniu żuka z punktu B .
- (b) W którym miejscu znajduje się żuk, gdy prędkość jego cienia jest osiem razy większa od prędkości żuka?

Rozwiązanie. (a) Oznaczmy przez D punkt u podnóża ściany pierwszego budynku, przez $Z(t)$ położenie żuka w t minut po wyruszeniu z punktu B , a przez $C(t)$ położenia cienia żuka w chwili t . Niech $h(t)$ oznacza wysokość punktu $C(t)$ nad ziemią. W ciągu t minut żuk przebył t metrów, więc punkt $Z(t)$ leży w odległości t od B i $20 - t$ od A . Trójkąty $ADZ(t)$ oraz $BC(t)Z(t)$ są podobne, więc $\frac{h(t)}{t} = \frac{10}{20-t}$. Zatem $h(t) = \frac{10t}{20-t}$, $h'(t) = \frac{200}{(20-t)^2}$.

(b) Zauważmy, że $h'(t) = 8 \Leftrightarrow t = 15$ czyli gdy żuk jest w trzech czwartych drogi.



4. (3pt.) Znajdź wszystkie punkty stacjonarne funkcji $f(x, y) = y^3 + x^2 - 3y$ i zbadaj, w których z nich f ma ekstrema lokalne (i jakie), a które są punktami siodłowymi.

Rozwiązanie.

Obliczamy gradient funkcji f i przyrównujemy do wektora zerowego: $\text{grad } f(x, y) = (2x, 3y^2 - 3) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 1), (0, -1)$. Są więc dwa punkty stacjonarne: $P_1 = (0, 1), P_2 = (0, -1)$. Obliczamy hesjan $H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 12y$. Ponieważ $H(0, 1) = 12 > 0$ to w punkcie $P_1 = (0, 1)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, a ponieważ $f''_{xx}(0, 1) = 2 > 0$, to jest to minimum lokalne. Ponieważ $H(0, -1) = -12 < 0$, to $P_2 = (0, -1)$ jest punktem siodłowym.

5. (6pt.) Znajdź przynajmniej jedno maksimum lokalne i przynajmniej jedno minimum lokalne funkcji $F(x, y) = 4x - xy^2$ na okręgu G opisanym równaniem $x^2 + y^2 = 4$.

Rozwiązanie poprawione po konsultacjach dnia 27.08.

Wprowadzamy funkcję opisującą okrąg G : $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Określamy funkcję Lagrange'a $L(\lambda, x, y) = 4x - xy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$. Znajdujemy jej gradient i przyrównujemy go do wektora zerowego:

$$\text{go: } \text{grad } L(\lambda, x, y) = (-y^2 - x^2 + 4, -y^2 - 2\lambda x + 4, -2xy - 2\lambda y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ -y^2 - 2\lambda x + 4 = 0, \\ -2xy - 2\lambda y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ -y^2 - 2\lambda x + 4 = 0, \\ (x + \lambda)y = 0. \end{cases} \quad \text{Z trzeciego równania wynika, że albo } y = 0 \text{ albo } \lambda = -x.$$

Jeśli $y = 0$, to z pozostałych równań wyznaczamy $x = \pm 2, \lambda x = 2$, więc dostajemy dwa punkty stacjonarne: $P_1 = (1, 2, 0), P_2 = (-1, -2, 0)$.

Jeśli $\lambda = -x$, to z pozostałych równań wynika, że $x = 0, y = \pm 2$. Dostajemy więc jeszcze dwa punkty stacjonarne: $P_3 = (0, 0, -2), P_4 = (0, 0, 2)$.

Obliczamy hesjan $H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & -2y \\ -2y & -2y & -2x - 2\lambda \end{vmatrix}$ w dowolnym punkcie, a następnie jego war-

tości w punktach stacjonarnych: $H(1, 2, 0) = 96, H(-1, -2, 0) = -96, H(0, 0, -2) = 0, H(0, 0, 2) = 0$. Ponieważ $H(1, 2, 0) > 0$, to w punkcie $(2, 0)$ funkcja F ma maksimum lokalne na okręgu G , a ponieważ $H(-1, -2, 0) < 0$, to w punkcie $(-2, 0)$ funkcja F ma minimum lokalne na okręgu G . Zauważmy, że zastosowane twierdzenie nie daje informacji o punktach $(0, 2), (0, -2)$.

U góry na każdej kartce napisz swoje imię, nazwisko oraz literę N.

Pisz czytelnie i jasno. Uzasadniaj swoje stwierdzenia. Załączaj rachunki.

1. (14p.) Dane są macierze $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ -a & -2a & -1 \\ 2-a & 2 & a \end{pmatrix}$, $B_a = \begin{pmatrix} 2a-2 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Zbadaj, ile rozwiązań ma równanie macierzowe $A_a \cdot X = B_a$ w zależności od wartości parametru a .
- Podaj rozwiązanie ogólne w przypadku, w którym więcej niż jedna macierz X spełnia dane równanie.
- Dla tej wartości parametru a , dla której zbiór rozwiązań jest przestrzenią liniową, znajdź bazę ortogonalną tej przestrzeni.

Rozwiązanie.

(a,b) Równanie macierzowe jest równoważne z układem równań i rozwiążemy je tak, jak rozwiązywaliśmy układy równań z parametrem. Ponieważ macierz A_a jest kwadratowa, obliczamy jej wyznacznik $\det(A_a) = a(a-1)^2$. Z twierdzenia o wzorach Cramera wynika, że dla $a \neq 1, a \neq 0$ jest jedno rozwią-

zanie. Gdy $a = 0$, to macierz rozszerzona układu jest równa $(A_0, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i po paru

operacjach elementarnych widać, że rozwiązań brak. Gdy $a = 1$, to $(A_1, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

więc równanie macierzowe sprowadza się do jednego równania liniowego $x+2y+z=0$, rozwiązania są

postaci $X = \begin{pmatrix} -2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, gdzie liczby y, z są dowolne. Jest to rozwiązanie

ogólne. Zatem dla $a = 1$ rozwiązań jest nieskończenie wiele.

(c) Zbiór rozwiązań układu równań liniowych jest przestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy kolumna wyrazów wolnych jest zerowa. W przypadku naszego układu ma to miejsce dla $a = 2$.

Bazą przestrzeni rozwiązań jest np. układ $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ znaleziony powyżej. Bazą

ortogonalną jest np. układ $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = v - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, więc bazą ortonormalną jest $\frac{1}{|u_1|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.)

2. (7p.) Przekształcenie liniowe $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow M(2 \times 2)$ dane jest wzorem

$f(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a+c & a+b \\ a+b & a+c \end{pmatrix}$ dla dowolnego wielomianu $ax^2 + bx + c$ oraz $A: 1, x, x^2$ oznaczają

bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$, a $B: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bazę przestrzeni $M(2 \times 2)$.

- (a) Znajdź bazę jądra przekształcenia f .
- (b) Znajdź wymiar obrazu przekształcenia f .
- (c) Znajdź macierz $M(f)_A^B$.

Rozwiązanie.

(a) Wielomian $ax^2 + bx + c$ należy do jądra przekształcenia f wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\begin{pmatrix} a+c & a+b \\ a+b & a+c \end{pmatrix}$ jest zerowa, tzn. $\begin{cases} a+c=0, \\ a+b=0, \end{cases}$ tzn. $c = -a, b = -a$, tzn. $ax^2 + bx + c = a(x^2 - x - 1), a \in \mathbb{R}$. Bazę jądra tworzy wielomian $x^2 - x - 1$, bo każdy wielomian należący do jądra jednoznacznie da się zapisać jako kombinacja liniowa tego wielomianu.

(b) Z twierdzenia o wymiarze jądra i obrazu wynika, że $\dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{R}[x]_2 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$.

(c) Aby wypisać pierwszą kolumnę macierzy $M(f)_A^B$, należy wziąć pierwszy wektor bazy A , czyli 1 i zapisać macierz $f(1)$ jako kombinację liniową macierzy bazy B . Mamy $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, zatem pierwsza kolumna jest równa $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Podobnie zapisujemy obrazy wielomianów x

oraz x^2 i dostajemy $M(f)_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (11p.) Macierz endomorfizmu $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazie standardowej st jest równa $M = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 41 & -24 & 12 \\ -24 & -23 & 36 \\ 12 & 36 & 31 \end{pmatrix}$.

Dane są też wektory $t = (3, 2, 6), u = (-6, 3, 2), v = (6, 3, 2), w = (2, 6, -3) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Dla każdego z wektorów t, u, v, w zbadaj, czy jest wektorem własnym macierzy M , a jeśli tak, to jakiej wartości własnej odpowiada.
- (b) Wybierz spośród wektorów t, u, v, w bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
- (c) Znajdź macierz g w wybranej bazie ortonormalnej.
- (d) Opisz sens geometryczny przekształcenia g .

Rozwiązanie.

(a) Obliczamy $Mt = M \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 41 & -24 & 12 \\ -24 & -23 & 36 \\ 12 & 36 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 147 \\ 98 \\ 294 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = t$, zatem t

jest wektorem własnym i odpowiada mu wartość własna 1. Podobnie postępujemy z wektorami u, v, w i stwierdzamy, że wektory t, u są własne i odpowiadają wartości własnej 1, wektor w odpowiada wartości własnej -1 , a wektor v nie jest własny.

(b) Obliczając iloczyny skalarne $\langle t, u \rangle, \langle t, w \rangle, \langle u, w \rangle$ stwierdzamy, że wektory t, u, w stanowią bazę ortogonalną.

(c) Bazą ortonormalną jest układ $B : \frac{1}{7}t, \frac{1}{7}u, \frac{1}{7}w$. Wektory te również są wektorami własnymi macierzy M z wartościami własnymi równymi odpowiednio 1, 1, -1 . Zatem Macierz przekształcenia g w bazie

B jest więc równa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Zatem przekształcenie g jest symetrią prostopadłą na płaszczyznę $\text{lin}(t, u) = w^\perp$ opisaną równaniem $2x + 6y - 3z = 0$ (por. definicję symetrii w punkcie 41 wykładu 13).

4. (12p.) Dany jest wektor $w = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Znajdź długość wektora w .
- (b) Dopełnij w do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożonej z wektorów tej samej długości.
- (c) Znajdź macierz rzutu prostopadłego π na płaszczyznę $w^\perp$ (prostopadłą do w) w znalezionej bazie.
- (d) Znajdź macierz rzutu π w bazie standardowej.

Rozwiązanie.

(a) $|w| = \sqrt{0^2 + (-\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2} = 1$.

(b) Ponieważ pierwsza współrzędna wektora w jest równa 0, to wektor $u = (1, 0, 0)$ jest prostopadły do w i też ma długość 1. Trzeci wektor znajdujemy jako iloczyn wektorowy $v = w \times u = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Zatem układ $B : u = (1, 0, 0), v = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), w = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ jest bazą ortonormalną $\mathbb{R}^3$.

(c) Ponieważ $\pi(u) = u, \pi(v) = v, \pi(w) = 0$, to z pierwszej charakteryzacji macierzy przekształcenia liniowego wynika, że $M(\pi)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Niech $C = M(\text{id})_B^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Ponieważ baza B jest ortonormalna, to C jest macierzą ortogonalną, więc $C^{-1} = C^T$. Możemy też zapisać $C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Ze wzoru na macierz złożenia przekształceń wynika, że $M(\pi)_{\text{st}} = CM(\pi)_B C^{-1} = CM(\pi)_B C^T = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$.

5. (6p.) Niech A oznacza dowolną macierz kwadratową.

- (a) Zbadaj, czy każdy wektor własny macierzy A jest również wektorem własnym macierzy A^3 .
- (b) Zbadaj, czy każdy wektor własny macierzy A^3 jest również wektorem własnym macierzy A .

(a) Tak, bo skoro pomnożenie przez macierz A nie zmienia kierunku wektora, to trzykrotne pomnożenie też nie zmienia.

(b) Nie, bo na przykład obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o kąt $\frac{2\pi}{3}$ nie ma wektorów własnych, a jego trzykrotne złożenie jest identycznością i wszystkie wektory są własne.