ZADANIA Z MOB DLA GRUPY IV MOB I i GRUPY III MOB II

1. Narysuj kulę o promieniu 1 i środku w $(0,1)$ dla norm $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_0$ w przestrzeni $X = \mathbf{R^2}$.

2. Wskaż punkt x_0, $\|x_0\| = 1$, taki że $\|Ax_0\| = \|A\|$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_0$.

3. Oblicz normy $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|A\|_0$, $\|A\|_F$ dla

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. Normy w przestrzeni X, $\|\cdot\|$ i $|||\cdot|||$ nazywają się równoważne, jeśli istnieją stałe dodatnie α i β, takie że

$$\forall x \in X \quad \alpha\|x\| \leq |||x||| \leq \beta\|x\|.$$

Znajdź takie stałe dla każdej z par spośród $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_0$.

5. Niech U będzie macierzą unitarną wymiaru $n \times n$. Znajdź związki między $\|U\|_0$, $\|U\|_F$, $\|U\|_1$. Udowodnij, że $\mathrm{cond}_0(U) = 1$. Co da się powiedzieć o $\mathrm{cond}_\infty(U)$ i $\mathrm{cond}_1(U)$?

6. Udowodnij, że

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)}$$

7. **Zadanie z komputerem.**Posługując się algorytmem Hornera zapisz wielomian

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

za pomocą bazy

$$1, \quad x-\alpha, \quad (x-\alpha)^2, \ \cdots, \quad (x-\alpha)^n.$$

Napisz i uruchom program znajdujący współczynniki rozwinięcia w nowej bazie. Dane dla programu: a_0, a_1, $\cdots, a_n$, n, α powinny być wczytywane z klawiatury komputera.

8. **Zadanie z komputerem.** Zaprogramuj algorytm różnic dzielonych, oraz przy pomocy rodzaju algorytmu Hornera dla bazy Newtona, zaprogramuj wyliczanie wartości wielomianu interpolacyjnego w zadanym punkcie. Dane wczytywane przez program: n, węzły, wartości funkcji interpolowanej, x (gdzie obliczyć wartość). Zaprojektuj tak program, żeby było wygodnie go używać!

9. Podaj koszt znajdowania wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a przy pomocy bazy Lagrange'a i bazy Newtona

10. **Zadanie z komputerem.** Dla węzłów

$$0,\ .1,\ .2,\ .3, \cdots, 2$$

znajdź na dwa sposoby wielomian interpolujący funkcję $\sin x$:

- rozwiązujac układ równań liniowych z macierzą Vandermonda
- stosując bazę Lagrange'a lub bazę Newtona (do wyboru)

Porównaj wyniki.

11. Zakładając, że $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, dla elementów bazy Lagrange'a $l_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n$ udowodnij oszacowanie

$$\|l_j\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{n!}{j!(n-j)!}(\frac{h}{\overline{h}})^n,$$

gdzie $h = \max\{x_{j+1} - x_j\}$, zaś $\overline{h} = \min\{x_{j+1} - x_j\}$.

12. Wielomian Czebyszewa stopnia k na przedziale $[-1, 1]$, to

$$T_k(x) = \cos k\theta,$$

gdzie $\theta = \arccos x$. Udowodnij, że $\{T_k\}_{k=0,1,2,\cdots}$ jest ciągiem wielomianów ortogonalnych w sensie iloczynu skalarnego

$$(T_k, T_j) = \int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

zaś

$$(T_k, T_j) = \begin{cases} 0 & \text{gdy k} \neq 0 \\ \pi & \text{gdy k} = \text{l} = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{gdy k} = \text{l} > 0 \end{cases}$$

13. Jaki jest współczynnik przy x^k wielomianu T_k?

14. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu T_k. Jaką mają one krotność i w jakim przedziale leżą? Porównaj położenie pierwiastków wielomianów T_k i T_{k+1}. Wyznacz też punkty w których $|T_k|$ przyjmuje maksymalne wartości na przedziale $[-1, 1]$. Ile jest takich punktów?

15. Udowodnij, że $\forall z \in \mathcal{C}$

$$T_k(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^k + (z - \sqrt{z^2 - 1})^k}{2}$$

Wskazówka: Skorzystaj z formuły 3-członowej.

16. Niech $0 < a < b$,

$$R_k(x) = \frac{T_k(\frac{a+b-2x}{b-a})}{T_k(\frac{a+b}{b-a})}.$$

Udowodnij, że

$$\|R_k\|_{\infty,[a,b]} \leq 2\left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a} - 1}}{\sqrt{\frac{b}{a} + 1}}\right)^k, \quad R_k(0) = 1.$$

Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania.

17. Udowodnij, że $P_k(x) = 2^{1-k}T_k(x)$ ma najmniejszą normę $\| \cdot \|_{\infty,[-1,1]}$, wśród wielomianów w_k, takich że $w_k(x) = x^k + \cdots$, zaś $R_k(x)$, najmniejszą normę $\| \cdot \|_{\infty,[a,b]}$ wśród wielomianów w_k stopnia k, takich że $w_k(0) = 1$.

18. Dany jest ciąg o dwóch wskaźnikach, określony rekurencyjnie

$$u_k^{n=1} = u_k^n + \mu[u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n], \; u_k^0 = v_k, \; k = 0, 1, \cdots, N-1$$

N-periodyczny względem k. Znajdź DFT tego ciągu względem k. Porównaj ciągi u_k^n i $\hat{u}_k^n$.

19. Znajdź DFT ciągów $u_k = 1, \quad u_k = \begin{cases} 0 & k \neq p \\ 1 & k = p \end{cases}$ i $\quad u_k = v_{k-1}w_{k+1}$

$k = 0, 1, 2, \cdots, N-1, \; p < N.$

20. **Filtr.** W transformacie DFT $\underline{\hat{u}}$ ciągu $\underline{u}$ wyzerowano elementy o najwyższych częstotliwościach $\hat{u}_{p+1}, \cdots, \hat{u}_{N-p}$. Znajdź tak zmodyfikowany ciąg $\underline{u}$.

21. Funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ \sin(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$$

zaaproksymowano wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a na przedziale $[-\pi, \pi]$ używając równo odległych węzłów

$$x_j = -\pi + kh, \quad h = \frac{\pi}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, 2N.$$

Oszacuj błąd interpolacji na przedziale $[0, \pi]$ i $[-\pi, \pi]$.

22. Zbuduj wielomian interpolacyjny P dla danych:

$$x_j = j, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

$$P(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$
$$P^{'}(x_2) = f^{'}(x_2) = 1,$$
$$P^{''}(x_2) = f^{''}(x_2) = 2,$$
$$P^{'}(x_3) = f^{'}(x_3) = 1.$$

23. Napisz algorytm dla skonstruowania splajnu kubicznego interpolacyjnego dla funkcji $\sin x$ na przedziale $[0, 2\pi]$, dla węzłów

$$x_j = j\frac{\pi}{2}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

24. Dana jest tablica węzłów o krotności 2

$$x_j = j\pi, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Zbuduj wielomian interpolacyjny Hermite'a dla funkcji $f(x) = \sin x$. Oszacuj błąd interpolacji.

25. W rzeczywistej przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $(\cdot,\cdot)$ dany jest element $\phi \neq 0$. Znajdź operator rzutu ortogonalnego $P : H \to V$, gdzie $V = \text{span}\{\phi\}$.

26. W przestrzeni $H = L^2(0, 2\pi)$ znajdź operator rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń $V = \text{span}\{\cos x, \ \sin x\}$.

27. W przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $(\cdot,\cdot)$ dany jest element $a \in H, \quad a \neq 0$, oraz podprzestrzeń V, $\dim(V) < \infty$. Dla dowolnego $x \in H$ znajdź $ENA(x) \in W$, gdzie W jest rozmaitością liniową

$$W = V + a = \{w \in H \mid w = a + v, \ \forall v \in V\}.$$

Uzasadnij poprawność rozwiązania.

28. W przestrzeni $H = \mathbf{R^4}$ dane są wektory $a = [1, 2, 3, 4]^T$, $b = [0, 1, 2, 3]^T$, $c = [0, 0, 1, 2]^T$. Opisz algorytm znajdowania $ENA(x) \in \text{span}\{a, b, c\}$ dla dowolnego $x \in H$.

29. Rozwiąż $LZNK$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

stosując układ normalny, oraz rozkład QR.

30. Dany jest układ punktów na płaszczyźnie $(x_j, y_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n$. Należy wyznaczyć wielomian P_r stopnia $\leq r, \quad r \leq n$, tak aby wykres $(x, P_r(x))$ przebiegał jak najbliżej zadanego układu punktów. Sformułuj zadanie jako LZNK i rozwiąż je dla wybranych przez siebie danych.

31. Użyj wielomianów Legendre'a $P_0, P_1, \cdots$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$\frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) = \frac{k}{k+1} P_{k-1} + P_{k+1}, \quad \|P_k\|^2 \frac{2}{2k+1},$$

które są ortogonalne w przestrzeni $L^2(-1, 1)$, do rozwiązania zadania poszukiwania

$$ENA(f) \in \text{podprzestrzeń \ wielomianów \ stopnia} \ \leq n$$

dla $f \in L^2(a, b), \quad a < b$.

32. Znajdź wielomian Q_1^0 stopnia ≤ 1 najlepszej aproksymacji w sensie normy $\| \cdot \|_{\infty,[0,2\pi]}$ dla funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$.

33. **Z komputerem *.** Zaprogramuj algorytm Remeza. Wykonaj obliczenia testowe na wybranych przez siebie przykładach.

34. **Z komputerem *.** Zaprogramuj poprawiony algorytm Gramma-Schmidta. Wykonaj obliczenia testowe na wybranych przez siebie przykładach.