Wykład 12.

POBLEM PUNKTU SIODŁOWEGO. Niech U i V będą przestrzeniami Hilberta. Dane są dwie formy dwuliniowe a i b

$$a : U \times U \to \mathbf{R},$$

$$b : U \times V \to \mathbf{R},$$

oraz $f \in U'$, $g \in V'$

Genezą problemu punktu siodłowego jest poszukiwanie *minimum* funkcjonału nieliniowego

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - < f, u >$$

dla $u \in U$ spełniających warunek

$$b(u,\mu) = < g, \mu >$$

dla każdego $\mu \in V$.

Utwórzmy tak zwaną *funkcję Lagrange'a:*

$$L(u,\lambda) = J(u) + [b(u,\lambda) - < g, \lambda >].$$

Poszukiwanie ekstremum J przy wspomnianym warunku sprowadza się do rozwiązania układu 2 równań

$$\frac{\partial}{\partial u} L(u,\lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(u,\lambda) = 0,$$

gdzie pochodne są rozumiane w sensie Frécheta.[1]

[1] Niech $F : X \to Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami Banacha zaś $h \in X$ jest dowolnym elementem X. Przypuśćmy, że istnieje operator liniowy ograniczony, zależny (na ogół w sposób nieliniowy od $x \in X$), $A(x) : X \to Y$, taki, że $F(x+h) - F(x) = A(x)h + \omega(x,h)$ i $\frac{\|\omega(x,h)\|}{\|h\|} \to 0$, gdy $h \to 0$. Wtedy operator $A(x) : X \to Y$ nazywa się **pochodną Frécheta** funkcji F w punkcie $x \in X$, zaś $A(x)h \in Y$ nazywa się **różniczką Frécheta** funkcji F w punkcie x dla przyrostu $h \in X$.

Łatwo obliczamy:

$$\frac{\partial}{\partial u}L(u,\lambda)h = \hat{a}(u,h) - < f,h > + b(h,\lambda), \quad h \in U,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}L(u,\lambda)k = b(u,k) - < g,k >, \quad k \in V,$$

gdzie $\hat{a}(u,h) = \frac{1}{2}[a(u,h) + a(h,u)]$. Równania wyznaczające punkt stacjonarny są w tym przypadku postaci

$$\hat{a}(u,h) + b(h,\lambda) = < f,h >, \quad \forall\ h \in U,$$

$$b(u,k) = < g,k >, \quad \forall\ k \in V.$$

Tutaj $\hat{a}$ jest formą dwuliniową symetryczną. Pozbywamy się tego warunku symetrii; uogólniając, będziemy nazywali *zagadnieniem punktu siodłowego* następujący układ dwóch równań wariacyjnych:

(PS) poszukujemy pary $u \in U, \quad \lambda \in V$ takiej , że

$$a(u,h) + b(h,\lambda) = < f,h > \quad \forall\ h \in U,$$
$$b(u,k) = < g,k > \quad \forall\ k \in V,$$

gdzie a i b - to formy dwuliniowe ograniczone, $a : U \times U \to \mathbf{R}$, $b : U \times V \to \mathbf{R}$, $f \in U'$, $g \in V'$.

Wiemy już, że formy a i b określają operatory A i B

$$a(u,h) = < Au,h >, \quad A : U \to U',$$

$$b(u,k) = < Bu,k >, \quad B : U \to V',$$

$$b(k,u) = < Bk,u > = < B'u,k >, \quad B' : V \to U'.$$

Równania (PS) możemy zapisać w sposób równoważny, posługując się operatorami A i B

$$Au + B'\lambda = f,$$

$$(PS') \qquad Bu = g.$$

Wygodnie będzie jeszcze oznaczyć

$$W = \{w \in U \mid b(w,k) = 0 \ \ \forall\ k \in V\} = KerB.$$

Lemat. *Warunki 1, 2, 3 są równoważne:*

1. $\exists\ \gamma > 0 \quad \gamma\|\mu\| \leq \sup_{v\in V} \frac{b(v,\ \mu)}{\|v\|}$,
2. $b(v,\ \mu) =< Bv,\ \mu >$

   $B : U \to V'$,

   $B : W^{\perp} \to V'$ *jest izomorfizmem na i* $\|Bv\| \geq \gamma\|v\|$,
3. $B' : V \to U'$

   $B' : V \to W^0 \subset U'$ *jest izomorfizmem na i* $\|B'\mu\| \geq \gamma\|\mu\|$.

Dowód.

- *1.* $\Rightarrow$ *3.* Mamy $b : U \times V \to \mathbf{R}$, oraz

  $$\gamma\|\mu\| \leq \sup_{u\in U} \frac{b(u,\mu)}{\|u\|} = \sup_{u\in U} \frac{< Bu,\mu >}{\|u\|} = \sup_{u\in U} \frac{< B'\mu, u >}{\|u\|} = \|B'\mu\|,$$

  a więc B'^{-1} istnieje i jest ograniczony: $B' : V \to B'V \subset U'$. Oznacza to, że $B'V$ jest przeciwobrazem przez B^{-1} zbioru domkniętego V. Stąd wynika, że $B'V = \overline{B'V}$, a więc $B'V = (KerB)^0 = W^0$. A więc

  $$B' : V \to W^0$$

  jest izomorfizmem i $\gamma\|\mu\| \leq \|B'\mu\|$.

- *3.* $\Rightarrow$ *1.* Jeśli $\|B'\mu\| \geq \gamma\|\mu\|$, to

  $$\sup_{u\in U} \frac{b(u,\mu)}{\|u\|} = \sup_{u\in U} \frac{< B'\mu, u >}{\|u\|} = \|B'\mu\| \geq \gamma\|\mu\|.$$

- *3.* $\Rightarrow$ *2.* Mamy $b(u,\mu) =< B'\mu, u >$, a ponieważ $B' : V \to W^0 \subset U'$ jest izomorfizmem, to $\forall\ \lambda \in W^0 \subset U' \quad \exists\ v \in V \quad B'v = \lambda$. Niech $u \in W^{\perp}$; $(u,\cdot)_U$ jest funkcjonałem nad U, zatem $(u,\cdot)_U \in W^0$. Istnieje zatem $v \in V$, $B'v = (u,\cdot)_U$, a więc, dla takiego v

  $$\forall\ w \in U \quad < B'v, w >= (u,w)_U =< Bw, v >= b(w,v).$$

Podstawmy $w = u \in W^{\perp}$; stąd

$$\sup_{k \in V} \frac{b(u,k)}{\|k\|} \geq \frac{b(u,v)}{\|v\|} = \frac{(u,u)_U}{\|v\|} = \frac{\|u\|^2}{\|v\|}.$$

Ale z twierdzenia Riesza wynika, że $\|u\| = \|B'v\| \geq \gamma\|v\|$. Zatem ostatecznie $\forall\ u \in W^{\perp} \subset U$

$$\sup_{k \in V} \frac{b(u,k)}{\|k\|} = \sup_{k \in V} \frac{< Bu, k >}{\|k\|} = \|Bu\| = \frac{\|B'v\|\|u\|}{\|v\|} \geq \gamma\|u\|.$$

To znaczy, że forma b jest ograniczona i spełnia warunek "inf-sup". Pokażemy jeszcze, że

$$\forall\ k \in V, \quad k \neq 0\ \ \exists\ u \in U \quad b(u,k) \neq 0.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest; wtedy

$$\exists\ k \neq 0\ \ \forall\ u \in U \quad b(u,k) =< Bu, k >=< B'k, u >= 0.$$

Ponieważ jednak $B' : V \to W^0$ jest izomorfizmem, to $B'k = 0 \ \Rightarrow\ k = 0$. Stad sprzeczność z założeniem, że $k \neq 0$. Zatem na podstawie **Twierdzenia NNBA** $B : W^{\perp} \to V'$ jest izomorfizmem i $\|Bu\| \geq \gamma\|u\|$, to znaczy, że *3.* $\Rightarrow$ *2.*

- *2.* $\Rightarrow$ *1.* Niech $g \in V'$. Wtedy $\forall\ \mu \in V$ mamy

$$\|\mu\| = \sup_{g \in V'} \frac{< g, \mu >}{\|g\|}.$$

Ponieważ $B : W^{\perp} \to V'$ jest izomorfizmem, to istnieje $u \in W^{\perp}$ taki, że $Bu = g$. Zatem

$$\|\mu\| = \sup_{u \in W^{\perp}} \frac{< Bu, \mu >}{\|Bu\|} \leq \sup_{u \in W^{\perp}} \frac{b(u,\mu)}{\gamma\|u\|} \leq \sup_{u \in U} \frac{b(u,\mu)}{\gamma\|u\|},$$

gdyż $\|Bu\| \geq \gamma\|u\|$; to znaczy, że

$$\gamma\|\mu\| \leq \sup_{u \in U} \frac{b(u,\mu)}{\|u\|}. \quad \blacksquare$$

Twierdzenie Franco Brezzi. *Jeśli spełnione są następujące warunki:*

$$\exists\ \alpha > 0 \quad \alpha\|u\| \leq a(u,u) \quad \forall\ u \in W = Ker\ B \subset U,$$

$$\exists\ \gamma > 0 \quad \gamma\|\mu\| \leq \sup_{u \in U} \frac{b(u,\mu)}{\|u\|} \quad \forall\ \mu \in V,$$

to zagadnienie (PS) *ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych* $f \in U'$ *i* $g \in V'$.

Dowód.

1. Drugie równanie (PS) jest postaci $b(u,k) =< g,k > \quad \forall\ k \in V$. Ze względu na drugi punkt tezy Lemmatu, znajdziemy taki element

$$u_0 \in W^{\perp}, \quad \text{że} \quad Bu_0 = g.$$

2. Teraz poszukujemy $w_0 \in W = Ker\ B$ takiego, że

$$a(u_0 + w_0, v) =< f, v >, \quad \forall\ v \in W \subset U,$$

lub też inaczej, poszukujemy rozwiązania w_0 równania

$$a(w_0, v) =< f, v > -a(u_0, v), \quad \forall\ v \in W \subset U.$$

Takie $w_0 \in W$ istnieje i jest jednoznaczne, gdyż nasze równanie spełnia założenia Twierdzenia Laxa-Milgrama.

3. Teraz szukamy λ, z równania

$$b(v,\lambda) =< f, v > -a(u_0, v) - a(w_0, v), \quad \forall\ v \in U.$$

Funkcjonał występujący po prawej stronie oznaczymy symbolem F:

$$< F, v >=< f, v > -a(u_0, v) - a(w_0, v).$$

Z Lemmatu (punkt *3.*) wiemy, że

$$B' : V \to W^0 \subset U'$$

jest izomorfizmem, zatem istnienie rozwiązania λ jest równoważne warunkowi $F \in W^0$, czyli warunkowi

$$< F, w >= 0 \quad \forall\ w \in W.$$

Ale ten warunek jest spełniony ze względu na definicję w_0 w punkcie 2. tego dowodu. ∎

Aproksymacja zadania (PS). Wybieramy podprzestrzenie skończonego wymiaru $U_h \subset U$, oraz $V_h \subset V$, oraz definiujemy

$$W_h = \{w \in U_h |\ b(w,k) = 0 \ \ \forall\ k \in V_h\},$$

$$W_h(g) = \{w \in U_h |\ b(w,k) =< g,k > \quad \forall\ k \in V_h\}.$$

Zauważmy, że na ogół $W_h \not\subset W = ker\ B \subset U$.

Warunki LBB (Ladyženska, Babuška, Brezzi). Są to warunki **nałożone na podprzestrzenie** $U_h \subset U$ **i** $V_h \subset V$. Formy

$$a : U \times U \to \mathbf{R},$$

$$b : U \times V \to \mathbf{R}$$

są ograniczone i ponadto

(A) $\quad a$ jest W_h -koercywna $\exists\ \alpha > 0 \ \ \alpha\|u_h\| \leq a(u_h,u_h) \ \ \forall\ u_h \in W_h,$

zakładamy też, że forma b spełnia następujący warunek "inf-sup":

$$(B) \qquad \exists\ \gamma > 0, \ \ \gamma\|\mu_h\| \leq \sup_{v_h \in U_h} \frac{b(v_h,\mu_h)}{\|v_h\|} \ \ \forall\ \mu_h \in V_h.$$

Problem "przybliżony".

poszukujemy pary $(u_h, \lambda_h) \in U_h \times V_h$ spełniającej równania

$$(PS_h) \qquad a(u_h,v) + b(v,\lambda_h) =< f,v > \quad \forall\ v \in U_h,$$

$$b(u_h,k) =< g,k > \quad \forall\ \ k \in V_h.$$

Zauważmy, że ze względu na warunek **LBB**, dla problemu (PS_h) zawsze istnieje jednoznaczne rozwiązanie.

Realizacja. Przypuśćmy, że znamy bazy dla przestrzeni $U_h \subset U$ i dla przestrzeni $V_h \subset V$

$$U_h = span\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_M\},$$

$$V_h = span\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_M\}.^2$$

Mamy

$$u_h = \sum_{j=1}^{M} \phi c_j, \quad \lambda_h = \sum_{j=1}^{M} \psi_j d_j,$$

więc "równania przybliżone" możemy zapisać w formie macierzowej

$$\begin{bmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{c} \\ \underline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{g} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$A_h = (a_{k,j}), \quad a_{k,j} = a(\phi_j, \phi_k),$$

$$B_h = (b_{k,j}), \quad b_{k,j} = b(\phi_j, \psi_k),$$

$$\underline{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_M]^T,$$

$$\underline{d} = [d_1, d_2, \cdots, d_M]^T,$$

$$\underline{f} = [< f, \phi_1 >, < f, \phi_2 >, \cdots, < f, \phi_M >]^T,$$

$$\underline{g} = [< g, \psi_1 >, < g, \psi_2 >, \cdots, < g, \psi_M >]^T.$$

Pierwsze Twierdzenie o zbieżności. *Niech* $(u, \lambda) \in U \times V$ *i* $(u_h, \lambda_h) \in U_h \times V_h$ *będą rozwiązaniami równań* (PS) *i* (PS_h) *odpowiednio. Wtedy, jeśli spełniony jest warunek* **LBB***, to*

$$\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\| \le C \; [\inf_{w_h \in W_h(g)} \|u - w_h\| + \inf_{\mu_h \in V_h} \|\lambda - \mu_h\|],$$

gdzie C *jest stałą niezależną od* h.

Dowód. Odejmijmy stronami odpowiadające sobie równania z układu (PS) i (PS_h). Otrzymamy

$$a(u - u_h, v) + b(v, \lambda - \lambda_h) = 0, \quad \forall \; v \in U_h,$$

$$b(u - u_h, k) = 0 \;\; \forall \; k \in V_h.$$

Zauważmy od razu, że z drugiego równania wynika, że $u - u_h \in W_h$. Ponadto z drugiego równania (PS) i (PS_h) wynika, że odpowiednio, $u \in W(g)$, zaś

[2] Zarówno ϕ_j, ψ_j, jak i M zależą na ogół od h, czego nie uwidaczniamy w notacji, aby nie komplikować oznaczeń.

$u_h \in W_h(g)$. Niech $w_h \in W_h(g)$, $\mu_h \in V_h$. Odejmując i dodając te elementy, dostaniemy

$$(*) \qquad a(u_h - w_h, v) + b(v, \lambda - \mu_h) = a(u - w_h, v) + b(v, \lambda - \mu_h).$$

Podstawmy teraz $v = u_h - w_h \in W_h$. Wtedy $b(u_h - w_h, \lambda_h - \mu_h) = 0$, gdyż $u_h - w_h \in W_h$, zaś $\lambda_h - \mu_h \in V_h$. Wykorzystując teraz ciągłość form a i b, oraz W_h-koercywność formy a, otrzymamy

$$(**) \qquad \|u_h - w_h\| \leq C_1 \; [\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\|],$$

gdzie C_1 jest pewna stałą niezależną od h.

Wróćmy teraz do wzoru $(*)$. Dzieląc stronami przez $\|v\|$, wykorzystując warunek "inf-sup", oraz ciągłość form a i b otrzymamy, dla pewnej stałej C_2

$$\|\lambda_h - \mu_h\| \leq C_2[\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\| + \|u_h - w_h\|].$$

Teraz podstawiając $(**)$ do ostatniej nierówności, oraz dobierając odpowiednio stałą C_3, stwierdzamy, że

$$\|\lambda_h - \mu_h\| \leq C_3 \; [\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\|].$$

Po dodaniu stronami nierówności $(**)$, oraz dobraniu stałej C_4, mamy

$$\|u_h - w_h\| + \|\lambda_h - \mu_h\| \leq C_4 \; [\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\|].$$

Jeszcze dodajemy stronami $\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\|$, wykorzystujemy po lewej stronie nierówność trójkąta, oraz dobieramy stałą C. Po wzięciu po obu stronach $\inf_{w_h \in W_h(g)}$, $\inf_{\mu_h \in V_h}$ otrzymamy tezę twierdzenia. ∎

Pierwsze Twierdzenie o Zbieżności, podaje oszacowanie błędu dla u w zależności od $\|u - w_h\|$ oraz $\|\lambda - \mu_h\|$. Ze względu na to, że $W_h \not\subset W$, oszacowania błędu dla u nie da się odseparować od błędu dla λ. Jest to niekorzystne, gdyż często w konkretnych przypadkach, aproksymacja dla λ jest słabsza niż możliwa do uzyskania aproksymacja u. Dodanie warunku, zwanego *warunkiem* C pozwala pozbyć się tego kłopotu. Jednakże założenie warunku C nakłada jeszcze więcej wymagań na dobór przestrzeni U_h i V_h.

Drugie Twierdzenie o Zbieżności. *Załóżmy, że podprzestrzenie* $U_h \subset U$ *i* $V_h \subset V$ *spełniają warunki* **LBB**, *oraz że spełniony jest* **warunek C**

$$(C) \qquad W_h \subset W = Ker\ B.$$

Wtedy zachodzi następujące oszacowanie:

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{w_h \in W_h(g) \subset U_h} \|u - w_h\|.$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia najpierw odejmujemy stronami odpowiednie równania (PS) i (PS'). Otrzymamy

$$a(u - u_h, v) + b(v, \lambda - \lambda_h) = 0 \ \ \forall\ v \in U_h \subset U,$$

$$b(u - u_h, k) = 0 \ \ \forall\ k \in V_h \in V.$$

Niech $w_h \in W_h(g)$; Odejmujemy i dodajemy w_h i dostajemy

$$a(u_h - w_h, v) = a(u - w_h, v) + b(v, \lambda - \lambda_h).$$

Podstawmy teraz $v = u_h - w_h$. Zauważmy, że ze względu na warunek **(C)** $b(u_h - w_h, \lambda - \lambda_h) = 0$. Zatem pozostaje tylko

$$a(u_h - w_h, u_h - w_h) = a(u - w_h, u_h - w_h).$$

Warunek W_h- koercywności formy a, oraz jej ciągłość dają nierówność

$$\|u_h - w_h\| \leq \ C_1 \|u - w_h\|.$$

Po dodaniu stronami $\|u - w_h\|$, skorzystaniu z nierówności trójkąta, oraz po wzięciu po obu stronach $\inf_{w_h \in W_h(g)}$ otrzymamy tezę. ∎

Ważnym przykładem zagadnienia punktu siodłowego jest zagadnienie Stokesa w postaci uogólnionej. Jego wersja klasyczna, to:

$$-\Delta \underline{u}(x) - \nabla p(x) = f(x),$$

$$\mathrm{div}\underline{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\underline{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

i dodatkowo, dla jednoznaczności $\int_\Omega p(x) d\Omega = 0$. Zmienną $\underline{u}$ interpretuje się jako pole prędkości w obszarze Ω, zaś p-jako ciśnienie.