Wykład 11.

Wstęp. Będzie nam potrzebne kilka pojęć z Analizy Funkcjonalnej. Przypomnijmy.

- **OPERATOR DUALNY.** Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $A : X \to Y$, operatorem liniowym i ograniczonym. Symbolem X' oznaczamy *przestrzeń dualną do* X, to jest przestrzeń Banacha wszystkich funkcjonałów liniowych i ograniczonych określonych na X. Norma w X', to zwykła norma funkcjonału. Elementy przestrzeni X' będziemy oznaczali symbolami $x', y' \cdots$. Zamiast pisać $x'(x)$ dla $x' \in X'$ i $x \in X$ będziemy często pisać $< x', x >$; zatem $x'(x) =< x', x >$.

  Niech $x \in X$ i $y' \in Y'$, będą dowolnymi elementami. Zauważmy, że $< y', Ax >$ określa funkcjonał liniowy nad X, możemy więc napisać

  $$< y', Ax >=< A'y', x >,$$

  gdzie $A' : Y' \to X'$. W ten sposób określony został operator A', zwany *operatorem dualnym (do A)*. Łatwo sprawdzić, że A' jest liniowy i ograniczony, a dokładniej $\|A'\| = \|A\|$.

- **JĄDRA, UZUPEŁNIENIA ORTOGONALNE I ZBIORY POLARNE.** Przy powyższych założeniach:

  $$KerA = \{x \in X \mid Ax = 0\},$$

  $$KerA' = \{y' \in Y' \mid A'y' = 0\} = \{y' \in Y' \mid < y', Ax >= 0 \ \forall \ x \in X\}.$$

  Są to jądra A i A'. Jądro operatora liniowego i ograniczonego jest domknięte.

  Jeśli $Z \subset V$, gdzie V jest przestrzenią Hilberta, to

  $$Z^{\perp} = \{v \in V \mid (z, v) = 0 \ \forall \ z \in Z\}.$$

  Jeśli Z jest podprzestrzenią domknięta, to $Z^{\perp}$ nazywa się *uzupełnieniem ortogonalnym* Z.

  Jeśli $U \subset X$ i $U = \bar{U}$, to $U^0 = \{x' \in X' \mid < x', u >= 0 \ \forall \ u \in U\}$ nazywa się *zbiorem polarnym dla* U. Zbiór polarny jest domknięty.

- **PRZESTRZEŃ BIDUALNA, PRZESTRZEŃ REFLEKSYWNA.** Przestrzeń dualna przestrzeni dualnej, to przestrzeń *bidualna*: $(X')' = X''$. Jej elementami są funkcjonały liniowe ograniczone nad X'. Zauważmy, że jeśli $x' \in X'$, to dla dowolnego ustalonego $x \in X$, $x''(x') = x'(x)$, $x'' \in X''$, a zatem $x \mapsto x''$ definiuje odwzorowanie liniowe X w X''. Jeśli to odwzorowanie jest izomorfizmem X i X'', to przestrzenie X i X'' można uważać za identyczne. Mówimy wtedy, że *przestrzeń X jest refleksywna.* Każda przestrzeń Hilberta jest refleksywna.

Zbadajmy co to jest $(KerA')^0$. Mamy $A' : Y' \to X'$.

$$(KerA')^0 =$$

$$= \{y'' \in Y'' \mid \ < y'', y' >= 0 \ \forall y' \in Y' \text{ takiego, że } < y', Ax >= 0 \ \forall \ x \in X\}.$$

Jeśli przestrzeń Y jest refleksywna ($Y = Y''$)

$$(KerA')^0 =$$

$$= \{y \in Y \mid \ < y', y >= 0 \ \forall \ y' \in Y' \text{ takiego, że } < y', Ax >= 0 \ \forall \ x \in X\}.$$

Zauważmy, że wtedy $AX \subset (KerA')^0$.

Twierdzenie. *Niech X i Y będą refleksywnymi przestrzeniami Banacha, $A : X \to Y$ - operatorem liniowym i ograniczonym. Wtedy*

$$AX = \overline{AX} \ w \ Y \ \Leftrightarrow \ AX = (KerA')^0.$$

Dowód. Zauważmy, że wystarczy udowodnić, że $\overline{AX} = (KerA')^0$. Wiemy już, że $AX \subset (KerA')^0$. Ponieważ każdy zbiór polarny jest domknięty, to również $\overline{AX} \subset (KerA')^0$. Przypuśćmy, że $\overline{AX} \neq (KerA')^0$. Wtedy istnieje taki element $y_0 \in (KerA')^0$, ze $y_0 \notin \overline{AX}$. Wiadomo, że wtedy istnieje taki funkcjonał $y_0{}' \in Y'$, że $< y_0', y_0 > \neq 0$, zaś $< y_0', Ax >= 0$, $\forall \ x \in X$. Ale dochodzimy w ten sposób do sprzeczności, gdyż jeśli $y_0 \in (KerA')^0$, to musi być $< y_0', y_0 >= 0$, jeśli $< y_0', Ax >= 0 \; \forall \; x \in X$. Zatem nie może być $\overline{AX} \neq (kerA')^0)$. [1]

Ogólniejsze równanie wariacyjne.

Niech U i V będą przestrzeniami Hilberta. Jeśli nie będzie to konieczne, nie będziemy rozróżniać oznaczeniami norm tych przestrzeni. Niech

$$a : U \times V \to \mathbf{R} \;\text{ będzie formą dwuliniową,}$$

zaś niech $l \in V'$. Ponadto założymy, że

$$\text{(1)} \qquad \exists M \geq 0 \;\; \forall \; u \in U \;\; \forall \; v \in V \;\; |a(u,v)| \leq \|u\| \|v\| \;\; \text{(ciągłość)},$$

$$\text{(2)} \qquad \exists \gamma > 0 \;\; \forall \; u \in U \;\; \gamma \|u\| \leq \sup_{v \in V} \frac{a(u,v)}{\|v\|} \;\; \text{(warunek inf-sup)},$$

$$\text{(3)} \qquad \forall \; v \in V, \; v \neq 0 \; \exists \; u \in U \;\; a(u,v) \neq 0.$$

Rozważamy równanie wariacyjne

$$\text{(4)} \qquad \text{poszukujemy } \; u \in U \; \text{ takiego, że } \; a(u,v) = lv \;\; \forall \;\; v \in V.$$

Twierdzenie NNBA (Nečas, Nirenberg, Babuška, Aziz.) *Jeśli spełnione są warunki* (1), (2), (3), *to równanie wariacyjne* (4) *ma jednoznaczne rozwiązanie* $u \in U$ *dla każdego* $l \in V'$.

Dowód. Wiemy, że forma a definiuje operator liniowy:

$$a(u,v) = < Au, v >, \quad A : U \to V'.$$

- **Operator A jest ciągły.** Mamy

$$\|Au\| = \sup_{v \in V, \; \|v\|=1} | < Au, v > | = \sup_{v \in V, \; \|v\|=1} |a(u,v)| \leq$$
$$\leq \sup_{v \in V, \; \|v\|=1} M \|u\| \|v\| = M \|u\|,$$

  a więc $\|A\| \leq M$.

[1] Gdy X i Y są przestrzeniami Hilberta (nas interesuje właśnie ten przypadek) łatwo znaleźć funkcjonał y_0'. Niech $P : Y \to \overline{AX} \subset Y$ będzie operatorem *rzutu ortogonalnego* na podprzestrzeń domkniętą $\overline{AX}$. Wtedy $y_0' = \tau(y_0 - Py_0)$, gdzie $\tau : Y \to Y'$ jest izomorfizmem Riesza. Z definicji P wynika, że $< y_0', Ax >= 0 \, \forall \, x \in X$, natomiast warunek $< y_0', y_0 > \neq 0$ wynika z nierówności Schwarza i własności boków trójkąta prostokątnego.

- **Odwracalność** A. Przypuśćmy, że A nie jest odwracalny. Wtedy w U istnieją dwa elementy różne $u_1 \neq u_2$ i $Au_1 = Au_2$. Mamy wtedy z warunku "inf-sup"

$$\gamma\|u_1 - u_2\| \leq \sup_{v\in V} \frac{a(u_1 - u_2, v)}{\|v\|} = \sup_{v\in V} \frac{< A(u_1 - u_2), v >}{\|v\|} = 0$$

  a więc $u_1 = u_2$, wbrew założeniu.

- **Ciągłość** A^{-1} **na** AU. Niech $l \in AU \subset V'$ i niech $u = A^{-1}l$. Wtedy z warunku "inf-sup"

$$\gamma\|u\| \leq \sup_{v\in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|} = \sup_{v\in V} \frac{< Au, v >}{\|v\|} = \sup_{v\in V} \frac{< l, v >}{\|v\|} = \|l\|.$$

  To oznacza, że $\|u\| = \|A^{-1}l\| \leq \frac{1}{\gamma}\|l\|$, a więc A^{-1} jest ograniczony na AU.

- **Domkniętość** AU**.** Ponieważ $U = A^{-1}AU$ to AU jest przeciwobrazem zbioru domkniętego U przez funkcję ciągłą A^{-1} jest więc zbiorem domkniętym w V'.

- $AU = (KerA')^0$. Wynika to z domkniętości AU (patrz "Twierdzenie"). Zatem

$$AU = \{v \in V|\ a(u, v) = 0\ \forall\ u \in U\}^0 \subset V'.$$

- $A : U \to V'$ **jest odwzorowaniem na całą przestrzeń** V'**.** Istotnie, ze względu na warunek (3) $KerA' = \{0\}$, więc $AU = (KerA')^0 = V'$. ■

Teraz zajmiemy się "zagadnieniem przybliżonym". Zastosujemy *(konforemną)* metodę Ritza-Galerkina. Niech $U_h \subset U$, $V_h \subset V$ będą rodzinami podprzestrzeni skończonego wymiaru. Trzeba będzie założyć, że są one dobrane do siebie tak, aby

$$(3') \qquad \forall\ h \in \omega\ \forall\ u_h \in U_h\ \gamma\|u_h\| \leq \sup_{v_h\in V_h} \frac{a(u_h, v_h)}{\|v\|},$$

(można założyć, że stała γ jest ta sama co we wzorze (3))

$$(4') \qquad \forall\ h \in \omega\ \forall\ v_h \in V_h\ v_h \neq 0\ \exists\ u_h \in U_h\quad a(u_h, v_h) \neq 0.$$

Równanie "przybliżone"

(5) poszukujemy $u_h \in U_h$ takiego, że $a(u_h, v_h) = lv_h \ \ \forall\ v_h \in V_h$.

Ponieważ założyliśmy spełnienie warunków (3') i (4'), równanie (5) ma dla każdego $h \in \omega$ jednoznaczne rozwiązanie $u_h \in U_h$.

Realizacja. Przestrzenie U_h i V_h dobieramy tak, aby były tego samego wymiaru dla każdego ustalonego h. Niech

$$U_h = \mathrm{span}\{\phi_1^h, \phi_2^h, \cdots, \phi_{M_h}^h\},$$

$$V_h = \mathrm{span}\{\psi_1^h, \psi_2^h, \cdots, \psi_{M_h}^h\}.$$

Wtedy

$$u_h = \sum_{j=1}^{M_h} \phi_j^h c_j^h.$$

Nasze równanie (5) może być teraz zapisane tak

$$\sum_{j=1}^{M_h} a(\phi_j^h, \psi_k^h) c_j^h = l\psi_k^h, \quad k = 1, 2 \cdots, M_h. \tag{6}$$

Jest to układ równań algebraicznych liniowych

$$A_h \underline{c}_h = \underline{l}_h, \tag{6'}$$

o macierzy

$$A_h = (a_{i,j}^h), \quad a_{i,j} = a(\phi_j^h, \psi_i^h),$$

Odwracalność macierzy A_h wynika z warunków (3')(4').

Lemmat. *Jeśli u jest rozwiązaniem równania* (4)*, zaś u_h rozwiązaniem równania* (5)*, to*

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \ \ \forall \ \ v_h \in V_h.$$

Dowód. Mamy

$$a(u, v_h) = lv_h \ \ \forall\ v_h \in V_h \subset V,$$

oraz

$$a(u_h, v_h) = lv_h \ \ \forall\ v_h \in V_h \subset V.$$

Odejmując stronami te równości otrzymujemy tezę. ■

Twierdzenie o zbieżności. *Jeśli* u *jest rozwiązaniem równania* (4), *zaś* u_h *rozwiązaniem równania* (5), *to*

$$\|u - u_h\| \leq (1 + \frac{M}{\gamma}) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|,$$

gdzie M *i* γ *jest odpowiednio stałą ciągłości i koercywności formy* a.

Dowód. Niech $w_h \in U_h$ będzie dowolnym elementem U_h. Z Lemmatu wynika

$$a(u - w_h + w_h - u_h, v_h) = 0 \quad \forall \quad v_h \in V_h.$$

Stad

$$a(u - w_h, v_h) = a(u_h - w_h, v_h) \quad \forall \quad v_h \in V_h.$$

Wykorzystując warunek "inf-sup", otrzymamy

$$\gamma \|u_h - w_h\| \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u - w_h, v_h)}{\|v_h\|} \leq M \|u - w_h\|,$$

a więc

$$\|u_h - w_h\| \leq \frac{M}{\gamma} \|u - w_h\|.$$

Ponieważ

$$\|u_h - u\| \leq \|u_h - w_h\| + \|u - w_h\|,$$

po dodaniu po obu stronach poprzedniej nierówności $\|u - w_h\|$ otrzymamy

$$\|u - u_h\| \leq (1 + \frac{M}{\gamma}) \|u - w_h\|,$$

zaś biorąc po obu stronach tej ostatniej nierówności $\inf_{w_h \in U_h}$ otrzymamy tezę. ∎