Wykład 10.

Grzechy wobec Metody Elementu Skończonego.

Opisana tutaj metoda Elementu Skończonego działa poprawnie pod warunkiem zachowania wszystkich przyjętych założeń. Jednak nie zawsze możemy, bądź też nie zawsze chcemy, te założenia spełnić. Dotyczy to najczęściej:

- Stosowania tych samych form a i l w sformułowaniu oryginalnym i przybliżonym naszego zadania. Użycie innych form określających "przybliżone" równanie wariacyjne, to jest pierwszy z *grzechów*. Do popełnienia tego grzechu może zmusić nas brak możliwości dokładnego "analitycznego" obliczenia całek potrzebnych do wyznaczenia form a i l. Możemy być zmuszeni do zastosowania *kwadratur numerycznych*. Niekiedy także może być nam wygodniej użyć kwadratury numerycznej niż obliczać analitycznie skomplikowane całki, szczególnie jeśli kwadratura numeryczna daje wynik z dokładnością tego samego rzędu co równanie aproksymujące nasze zadanie oryginalne.

- Zachowania *konforemności metody*, to znaczy budowania przestrzeni elementu skończonego w taki sposób, aby przestrzenie V_h były podprzestrzeniami przestrzeni V, na której jest określone zadanie oryginalne. Ten grzech zwykle jest popełniany z rozmysłem. Niekiedy ze względu na charakter rozwiązania zadania oryginalnego, a w szczególności ze względu na jego niską regularność, lepiej jest stosować wersję niekonforemną Metody Elementu Skończonego.

Rozpatrzmy te dwa przypadki

Zachowanie konforemności, ale zmienione formy a i l dla zadania przybliżonego.

Niech V będzie przestrzenią Hilberta, $V_h \subset V$ rodziną jej podprzestrzeni skończonego wymiaru.
Zadanie "oryginalne": szukamy $u \in V$ takiego, że

$$a(u, v) = lv \quad \forall v \in V.$$

Zadania "przybliżone": szukamy $u_h \in V_h$, takich, że

$$a_h(u_h, v_h) = l_h v_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

Zakładamy, że forma dwuliniowa a jest ciągła i koercywna ze stałymi odpowiednio M i γ; o formach a_h zakładamy, że są **jednakowo ciągłe i jednakowo koercywne**, to znaczy, ze istnieją stałe M i γ nie zależne od h, takie że

$$|a_h(u_h, v_h)| \leq M\|u_h\|\|v_h\|,$$

$$\gamma\|u_h\|^2 \leq a_h(u_h, u_h).$$

Przy tych założeniach z Twierdzenia Lax'a - Milgrama wynika, że zarówno zadanie "oryginalne", jak i zadania "przybliżone" mają jednoznaczne rozwiązania. Jednak przedstawiona dotychczas teoria zbieżności oparta o Twierdzenie Céa nie funkcjonuje. Twierdzenie Céa trzeba zstąpić czymś innym.

Pierwszy Lemmat Stranga. *Niech u i u_h będą odpowiednio rozwiązaniem zadania "oryginalnego" i "przybliżonego". Przy przyjętych założeniach istnieje stała C taka, że*

$$\|u - u_h\| \leq$$

$$\leq C\{\inf_{v_h \in V_h}[\|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|}] + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|lw_h - l_h w_h|}{\|w_h\|}\}$$

Komentarz. Zbieżność będzie zachowana przy odpowiednich warunkach aproksymacji nałożonych na podprzestrzenie V_h, pod warunkiem, że wyrażenia zawierające a, a_h oraz l i l_h po prawej stronie nierówności, dążą do zera. Zauważmy także, że część prawej strony przed którą stoi znak inf jest związany zarówno z aproksymacją przestrzeni V, przez V_h, jak i z aproksymacją formy a przez formy a_h. Pozostała część prawej strony dotyczy aproksymacji l przez l_h.

Dowód. Najpierw szacujemy $\|u_h - v_h\|$, gdzie $v_h \in V_h$ jest dowolnym elementem, wykorzystując koercywność a_h. Niech $w_h = u_h - v_h$. Wtedy

$$\gamma\|u_h - v_h\|^2 \leq a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) = a(u - v_h, w_h) - a(u - v_h, w_h) + a_h(u_h - v_h, w_h).$$

Stąd

$$\gamma\|u_h - v_h\|^2 \leq a(u - v_h, w_h) + a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h) - a(u, w_h) + a_h(u_h, w_h).$$

Dzieląc stronami przez $\|w_h\|$ i dobierając odpowiednio stałą C_1 otrzymamy

$$\|u_h - v_h\| \leq C_1[\|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|}] + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|lw_h - l_h w_h|}{\|w_h\|}.$$

Ponieważ $\|u_h - u\| \leq \|u_h - v_h\| + \|u - v_h\|$, po dodaniu do obu stron $\|u - v_h\|$ i dobraniu nowej stałej C otrzymamy

$$\|u - u_h\| \leq C\{[\|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|}] + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|lw_h - l_h w_h|}{\|w_h\|}\}.$$

Po obu stronach teraz bierzemy $\inf_{v_h \in V_h}$

$$\|u - u_h\| \leq$$

$$\leq C\{\inf_{v_h \in V_h} [\|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|}] + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|lw_h - l_h w_h|}{\|w_h\|}\}. \quad \blacksquare$$

Jeśli mamy do czynienia z niekonforemnością Metody Elementu Skończonego trzeba Twierdzenie Céa zastąpić Drugim Lemmatem Stranga.

Drugi Lemmat Stranga. *Niech:*

- V*-przestrzeń Hilberta,*
- $a : V \times V \to \mathbf{R}$ *forma dwuliniowa ciągła ze stałą ciągłości* M *i koercywna ze stałą koercywności* $\gamma > 0$,
- $l : V \to \mathbf{R}$ *forma liniowa ciągła,*
- V_h *rodzina przestrzeni liniowych skończonego wymiaru, unormowanych, z normami* $\|\cdot\|_h$ *odpowiednio. Zakładamy, że normy* $\|\cdot\|_h$ *są określone na przestrzeniach* $V + V_h$. [1]
- $a_h : (V + V_h) \times (V + V_h) \to \mathbf{R}$ *rodzina form dwuliniowych ciągłych ze stałą ciągłości* M *nie zależną od* h *i koercywnych na* V_h *ze stałą koercywności* $\gamma > 0$ *niezależną od* h,

  $$\gamma \|v_h\|_h^2 \leq a_h(v_h, v_h)$$

  dla $v_h \in V_h$,
- $l_h : V_h \to \mathbf{R}$ *rodzina form liniowych ciągłych.*

[1] $V + V_h$, to przestrzeń elementów postaci $v + v_h$, gdzie $v \in V$ i $v_h \in V_h$.

Rozpatrujemy:
zadanie "oryginalne":
poszukujemy $u \in V$ spełniającego równanie wariacyjne

$$a(u,v) = lv \quad \forall_{v \in V}$$

oraz zadanie "przybliżone":
poszukujemy $u_h \in V_h$ spełniającego równanie wariacyjne

$$a_h(u_h, v_h) = l_h v_h \quad \forall_{v_h \in V_h}.$$

Przy przyjętych założeniach istnieje stała C, taka, że

$$\|u - u_h\|_h \leq C[\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(u, w_h) - l_h w_h|}{\|w_h\|_h}].$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że z Twierdzenia Laxa - Milgrama wynika istnienie jednoznacznych rozwiązań u i u_h, zarówno dla zagadnienia "oryginalnego", jak i dla zagadnień "przybliżonych". Wykorzystując teraz koercywność a_h szacujemy $u_h - v_h = w_h$ dla dowolnego $v_h \in V_h$

$$\gamma \|u_h - v_h\|_h^2 \leq a_h(u_h - v_h, w_h) =$$

$$= a_h(u - v_h, w_h) - a_h(u - v_h, w_h) + a_h(u_h - v_h, w_h) =$$
$$= a_h(u - v_h, w_h, w_h) + l_h w_h - a_h(u, w_h).$$

Stąd

$$\gamma \|u_h - v_h\|_h \leq M \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(u, w_h) - l_h w_h|}{\|w_h\|_h}.$$

Podobnie jak w dowodzie Pierwszego Lemmatu Stranga dodajemy stronami $\|u - v_h\|_h$, i po dobraniu stałej C oraz wzięciu $\inf_{v_h \in V_h}$ po obu stronach, otrzymujemy tezę:

$$\|u - u_h\|_h \leq C[\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(u, w_h) - l_h w_h|}{\|w_h\|_h}]. \quad \blacksquare$$

Z Drugiego Lemmatu Stranga wynika zbieżnosc metody, pod warunkiem, że przestrzenie V_h mają odpowiednie *własności aproksymacyjne* dla przestrzeni V, oraz pod warunkiem, że wyrażenie w tezie, rozpoczynające się od $\sup_{w_h \in V_h}$ dąży do zera, gdy $h \to 0$.

Uwagi dotyczące realizacji algorytmów Metody Elementu Skończonego.

- **Element bazowy.** Wszystkie simpleksy wchodzące w skład triangulacji τ_h tworzymy na ogół, dokonując przekształcenia afinicznego *simpleksu bazowego* $\hat{T}$. Dla przestrzeni $\mathbf{R^2}$, $\hat{T}$ to trójkąt dany przez nierówności
$$0 \leq x + y \leq 1,$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

- Wspomniane wyżej przekształcenie afiniczne jest postaci $F(\hat{p}) = B\hat{p}+b$, gdzie $\hat{p} \in \hat{T}$, B jest macierzą, zaś b wektorem. Nie trudno zauważyć, że
$$cond(B) = \|B\|\|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_{\hat{T}}}\frac{h_T}{\rho_T},$$
gdzie ρ_T i $\rho_{\hat{T}}$, to odpowiednio średnice sfer wpisanych simpleksów T i $\hat{T}$, zaś h_T i $h_{\hat{T}}$ średnice tych simpleksów. Dowód pozostawiamy jako zadanie. Nierówność ta wskazuje na to, że jeśli triangulacja jest **regularna**, to współczynnik uwarunkowania przekształcenia afinicznego F jest ograniczony, gdyż $\rho_{\hat{T}}$ i $h_{\hat{T}}$, jako wymiary związane z simpleksem wzorcowym, są ustalone.

- Przez to przekształcenie afiniczne odwzorowujemy **cały element**
$$\{\hat{T}, \mathcal{P}_{\hat{T}}, \Sigma_{\hat{T}}\}$$
na element
$$\{T, \mathcal{P}_T, \Sigma_T\}.$$
Warto więc zastanowić się, jaka jest postać poszczególnych składników tego elementu przekształconego.