Wykład 9.

Pytanie. Niech

- $V = H^1(\Omega)$,
- rodzina triangulacji $\tau_h = \{T_1, T_2, \cdots, T_M\}$,
- ELEMENT= $\{T,\ \mathcal{P}_T,\ \Sigma_T\}$, gdzie $\mathcal{P}_T$ składa się z wielomianów stopnia $\leq s$,
- V_h-przestrzeń elementu skończonego, $v_h \in V_h \Rightarrow v_{h|T} \in \mathcal{P}_T$.

Kiedy przestrzenie V_h są konforemne?

Aby móc odpowiedzieć na to pytanie, trzeba jeszcze coś powiedzieć o przestrzeniach Sobolewa. Będzie to twierdzenie o tych przestrzeniach, które tu podamy bez dowodu.

Twierdzenie. *Przestrzeń $H^m(\Omega)$ jest identyczna ze zbiorem wszystkich takich elementów $v \in L^2(\Omega)$, że $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$ dla $\alpha = [i_1, i_2, \cdots, i_d]^T$ i $|\alpha| \leq m$, gdzie*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_d^{i_d}}$$

jest **pochodną dystrybucyjną (słabą).**

O dystrybucjach.[1]

Znamy już zbiór $C_0^\infty(\Omega)$wszystkich funkcji mających wszystkie pochodne ciągłe i nośniki zwarte, zawarte w zbiorze otwartym Ω. W $C_0^\infty(\Omega)$ wprowadza się topologię przestrzeni liniowej lokalnie wypukłej. Opiszemy krótko jaka to topologia.

- Dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$, dla wszystkich funkcji z $C_0^\infty(\Omega)$ o nośniku w K tworzymy ciąg seminorm

  $$p_{K,j}(\phi) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq j} |D^\alpha \phi(x)|, \quad j = 0, 1, 2, \cdots.$$

  W ten sposób dla każdego takiego zbioru K mamy przestrzeń funkcyjną liniową, lokalnie wypukłą.

---

[1] Więcej szczegółów na ten temat - patrz np. Kôsaku Yosida "Functional Analysis", Springer-Verlag 1966, pp 27-30.

- Można pokazać, że topologia przestrzeni związanej ze zbiorem zwartym K_1 jest indukowana przez topologię takiej przestrzeni związanej ze zbiorem zwartym K_2, jeśli $K_1 \subset K_2 \subset \Omega$. W ten sposób w $C_0^\infty(\Omega)$ tworzy się tak zwaną topologię *granicy prostej*. Zbiór otwarty dla w takiej topologii, to taki zbiór, którego przecięcie z każdą podprzestrzenią związaną z dowolnym zbiorem zwartym $K \subset \Omega$ jest otwarty. Taka topologia "widzi" fakt, że elementy $C_0^\infty(\Omega)$ mają wszystkie pochodne ciągłe.

Dystrybucja na Ω, to funkcjonał liniowy i ciągły T nad przestrzenią $C_0^\infty(\Omega)$,

$$T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R}.$$

Przykład 1. Niech $f \in L^2(\Omega)$ i $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$; niech

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)d\Omega.$$

Jest to dystrybucja przyporządkowana elementowi $f \in L^2(\Omega)$.

Przykład 2. Niech $f \in C^n([a,b]), \quad n \geq 1$ i $\phi \in C_0^\infty((a,b))$; niech

$$T_f(\phi) = \int_a^b f(x)\phi(x)dx.$$

Mamy $f'(x)\phi(x) + f(x)\phi'(x) = [f(x)\phi(x)]'$ i stąd

$$T_{f'}(\phi) = \int_a^b f'(x)\phi(x)dx = -T_f(\phi'),$$

gdyż funkcje ϕ mają nośniki zwarte w przedziale otwartym (a,b).

Komentarz. Dystrybucja T_f odpowiada funkcji f. Zamiast myśleć o funkcjach możemy myśleć o dystrybucjach im przyporządkowanych. W tym sensie możemy uważać dystrybucje za "uogólnione funkcje". $T_{f'}$ - to dystrybycja przyporządkowana pochodnej f'; powyższy wzór sugeruje następującą ogólną definicję:

Definicja pochodnej dystrybucji. *Pochodna* D^α *dystrybucji*

$$T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R},$$

gdzie $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ *i* $\alpha = [i_1, i_2, \cdots, i_d]$, *to dystrybucja*

$$D^\alpha T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R},$$

taka, że

$$D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha(\phi))$$

dla każdego $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Komentarz. Jeśli będziemy traktować "zwykłe" funkcje jako dystrybucje, możemy mówić o **pochodnych dystrybucyjnych (słabych)** dowolnego rzędu dla zupełnie dowolnych funkcji.

Możemy teraz wyjaśnić, co to znaczy

"pochodna dystrybucyjna D^α elementu $v \in L^2(\Omega)$ należy do $L^2(\Omega)$"

Znaczy to poprostu, że istnieje taki element $w \in L^2(\Omega)$, że

$$D^\alpha T_v(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_v(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v D^\alpha \phi d\Omega = \int_\Omega w \phi d\Omega,$$

dla dowolnego elementu $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Przykład dystrybucji. Niech $\Omega = \mathbf{R}$, i niech

$$H_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < x \\ 1 & \text{dla } t \geq x \end{cases}.$$

Jest to tak zwana *funkcja Heviside'a.* Znajdziemy pochodną słabą funkcji H_x. Dystrybucja przyporządkowana H_x:

$$T_{H_x}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} H_x(t)\phi(t)dt.$$

Mamy

$$\frac{d}{dt} T_{H_x} = T_{\frac{d}{dt}H_x}(\phi) = -T_{H_x}(\phi') = -\int_{-\infty}^{\infty} H_x(t)\phi'(t)dt =$$

$$= -\int_x^\infty \phi'(t)dt = \phi(x),$$

gdyż $\phi(\infty) = 0$; a więc, $\frac{d}{dt}T_{H_x}(\phi) = \phi(x)$.

Pochodna dystrybucyjna funkcji H_x "wybija" wartość argumentu ϕ w punkcie x. Tę dystrybucję nazywa się **"deltą Dirac'a"** i oznacza się symbolem δ_x. W sensie słabym:

$$\frac{d}{dt}H_x = \delta_x, \qquad \delta_x(\phi) = \phi(x).$$

Dystrybucja δ_x nie należy do $L^2(\Omega)$. ■

Teraz możemy odpowiedzieć na pytanie o konforemność przestrzeni elementu skończonego V_h dla $V = H^1(\Omega)$. Na postawione pytanie odpowiada poniższe Twierdzenie, które podaje warunek dostateczny na konforemność przestrzeni elementu skończonego.

Przypomnijmy uprzednio sformułowane założenia.

- $V = H^1(\Omega)$,
- Ω jest wielościanem d-wymiarowym,
- Elementy przestrzeni elementu skończonego V_h są "kawałkami wielomianami" stopnia $\leq s$. Dokładniej: dla każdego elementu T triangulacji τ_h

$$v_{h|T} \text{ jest wielomianem (d-zmiennych) stopnia } \leq s.$$

Twierdzenie. *Jeśli $v_h \in V_h$ jest funkcją ciągłą na Ω, to $v_h \in H^1(\Omega)$.*

Dowód. Trzeba udowodnić, że z ciągłości v_h wynika, że dla $j = 1, 2, \cdots, d$ pochodne dystrybucyjne

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_j}$$

należą do $L^2(\Omega)$. Niech dla $p \in T$, $w_{T,i}(p) = \frac{\partial v_h}{\partial x_i}(p)$ dla $i = 1, 2, \cdots, d$ gdzie

$$\tau_h = \{T_1, T_2, \cdots, T_M\}.$$

Funkcje $w_{T,i}$ na każdym simpleksie T są oczywiście dobrze określone, gdyż v_h na T jest wielomianem stopnia $\leq s$. Ponadto jeśli zdefiniujemy $w_i, \quad i = 1, 2, \cdots, d$ na Ω tak, że

$$w_{i|T}(p) = w_{T,i}(p) \text{ dla p } \in T,$$

to otrzymamy $w_i \in L^2(\Omega)$ dla $i = 1, 2, \cdots, d$. Jest tak, gdyż w_i pozostaje nieokreślone tylko na zbiorze wewnętrznych ścian wielościanu Ω, zaś zbiór ten jest d-wymiarowej miary zero.

Z Twierdzenia Greena i Twierdzenia Gaussa wynika, że na każdym simpleksie T mamy:

$$\int_T w_{i,T}\phi dT = \int_T \frac{\partial v_h}{\partial x_i}\phi dT = -\int_T v_h \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dT + \int_{\partial T} n_i v_h \phi dS, \quad i = 1, 2, \cdots, d,$$

gdzie $n_1, n_2, \cdots, d$ to składowe wersora normalnego zewnętrznego do ∂T i $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Weźmy teraz pod uwagę dwa simpleksy T_1 i T_2, stykające się wspólną ścianą S. Na tej wspólnej scianie S:

- v_h, jest ciągła,
- n_i $i = 1, 2, \cdots, d$ pochodzące od T_1 i T_2 różnią się znakiem.

Zsumujemy teraz stronami $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \cdots$ powyższy wzór. Otrzymamy dla $i = 1, 2, \cdots, d$:

$$\int_\Omega w_i \phi d\Omega = -\int_\Omega v_h \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{v_h}(\phi)$$

Co stało się z całkami po brzegach? Ze względu na to, co dzieje się na każdej wspólnej ścianie S, całki po brzegach wewnętrznych simpleksów znikną i pozostałaby tylko całka po $\partial\Omega$, gdyby nie funkcje ϕ, które mają nośniki zwarte w zbiorze otwartym Ω. Ostatecznie nie zostaje nic! Jak zauważyliśmy już wcześniej, $w_i \in L^2(\Omega), \quad i = 1, 2, \cdots, d$. Ze względu na definicję "należenia" pochodnej słabej do $L^2(\Omega)$, uwaga ta kończy dowód twierdzenia. ∎