Wykład 8.

Metoda Elementu Skończonego. Konforemna Metoda Elementu Skończonego jest szczególnym przypadkiem Metody Ritza-Galerkina; Metodę Elementu Skończonego otrzymujemy dobierając w specjalny sposób podprzestrzenie skończonego wymiaru V_h. Metoda Elementu Skończonego jest **konforemna**, jeśli dla każdego $h \in \omega$, $V_h \subset V$.[1] Przestrzenią V, w tym przypadku, jest najczęściej jedna z przestrzeni Sobolewa $H^m(\Omega)$, lub $H_0^m(\Omega)$.

Metodę Elementu Skończonego opiszemy dla nieco uproszczonego przypadku, gdy obszar $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ jest **wielościanem** $d-$wymiarowym ograniczonym, to jest skończoną sumą mnogościową simpleksów.

Rozważmy *rodzinę triangulacji zbioru* $\bar{\Omega}$,

$$\tau_h = \{T_1, T_2, \cdots, T_M\}.$$

Liczba M i zbiory T_j zależą od parametru $h \in \omega$, co nie zostało uwzględnione w oznaczeniach, aby ich nie komplikować. Rodzina τ_h nie musi składać się z simpleksów. Rozważa się również rozkłady zbioru $\bar{\Omega}$ na innego rodzaju podzbiory. Dla ustalenia uwagi tutaj będziemy mówić o *triangulacjach*, pamiętając jakie warunki powinien spełniać taki rozkład.

Rodzina τ_h jest *regularna* jeśli istnieją dwie stałe dodatnie κ i β, niezależne od h i takie, że

- $\beta h \leq h_T \leq h$, gdzie h_T, to średnica simpleksu $T \in \tau_h$, zaś $h = \max_{T \in \tau_h}\{h_T\}$.
- $\frac{\rho_T}{h_T} \geq \kappa$, gdzie ρ_T jest promieniem kuli wpisanej w T.

Element. *Element*, to trójka

$$\{T, \mathcal{P}_T, \Sigma_T\},$$

gdzie

- $T \in \tau_h$,

[1] Rozważa się również wersję **niekonforemną MES**. Wtedy warunek $V_h \subset V \quad \forall_{h\in\omega}$ nie jest spełniony. Do MES niekonforemnej nie stosuje się przedstawiona wyżej teoria zbieżności oparta na twierdzeniu Céa.

- $\mathcal{P}_T$ to przestrzeń liniowa skończonego wymiaru, funkcji określonych na zbiorze T; zwykle wymaga się żeby przestrzeń $\mathcal{P}_T$ zawierała wszystkie wielomiany stopnia $\leq s$, dla pewnego s-naturalnego.

- Σ_T to tak zwany *zbiór stopni swobody elementu*. Zbiór Σ_T jest skończonym układem liniowo niezależnych funkcjonałów nad przestrzenią $\mathcal{P}_T$:
$$\Sigma_T = \{\phi_1^h, \phi_2^h, \cdots, \phi_{N_h}^h\}.$$
Funkcjonały $\phi_1^h, \cdots, \phi_{N_h}^h$ mają następującą *własność interpolacji*: dla dowolnego układu liczb $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{N_h}$, równania
$$\phi_j^h(P) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \cdots, N_h$$
wyznaczają jednoznacznie element $P \in \mathcal{P}_T$.

Baza dualna. Bazę dualną budujemy wyznaczając elementy $P_1, P_2, \cdots, P_{N_h}$ z przestrzeni $\mathcal{P}_T$ przy pomocy układu równań
$$\phi_j^h(P_k) = \delta_{k,j} \quad k, j = 1, 2, \cdots, N_h.$$
Ze względu na warunki, które spełniają *stopnie swobody*, baza dualna zawsze istnieje, i jest jedyna.

Zauważmy, że mając bazę dualną możemy bardzo łatwo wyznaczyć tak zwany "interpolant", to jest taki element $P \in \mathcal{P}_T$, który dla dowolnego układu liczb $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{N_h}$ spełnia warunki "interpolacji":
$$\phi_j^h(P) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \cdots, N_h.$$
Widzimy, że
$$P = \sum_{j=1}^{N_h} P_j \alpha_j.$$
W przypadku, gdy funkcjonały ϕ_j^h "wybijają" wartość funkcji w zadanych punktach jest to prawdziwa interpolacja. Niech bowiem $x_1^h, x_2^h, \cdots, x_{N_h}^h$ będą różnymi punktami T. Niech
$$\phi_j^h(P) = P(x_j^h), \quad j = 1, 2, \cdots, N_h.$$

Jeśli $\{P_1, P_2, \cdots, P_{N_h}\}$ jest bazą dualną, to

$$\phi_k^h(P) = P(x_k^h) = \sum_{j=1}^{N_h} \phi_k^h(P_j)\alpha_j = \alpha_k.$$

Przestrzenie MES. Przestrzenie V_h tworzymy "sklejając" w odpowiedni sposób funkcje z przestrzeni $\mathcal{P}_T$. Otrzymujemy funkcje $v_h : \Omega \to \mathbf{R}$, $v_h \in V_h$ takie, że dla każdego $T \in \tau_h$

$$v_{h|T} \in \mathcal{P}_T.$$

Jeśli chcemy uzyskać *konforemną MES*, to sklejanie poszczególnych części v_h powinno być takie, żeby $v_h \in V$. Używając tych przestrzeni V_h, które w tym przypadku nazywa się *Przestrzeniami Elementu Skończonego*, wygodnie jest posługiwać się ich bazami. Przy tworzeniu tych baz często wykorzystujemy bazy dualne na poszczególnych elementach.

W naszych rozważaniach najczęściej wykorzystywaliśmy przestrzenie Sobolewa $H^1(\Omega)$ lub $H_0^1(\Omega)$ jako przestrzeń V. Ogólnie, przestrzenie Sobolewa $H^m(\Omega)$ najczęściej w takiej roli występują. Toteż ich własności będą dla nas najistotniejsze.

Interpolant. Prawdziwe jest następujące twierdzenie, które podajemy tu bez dowodu

Twierdzenie. *(Bramble-Hilbert) Niech $\Omega \subset \mathbf{R^2}$ i $u \in H^s(\Omega)$, gdzie $s \geq 2$. Niech τ_h będzie regularną rodziną triangulacji obszaru Ω. Wtedy w każdym trójkącie $T \in \tau_h$ można znaleźć takie punkty*

$$p_1, p_2, \cdots, p_l$$

i jedyny taki wielomian $P_{T,s-1}$ stopnia nie większego od $s-1$, że

$$P_{T,s-1}(p_j) = u(p_j) \quad j = 1, 2, \cdots, l$$

(Jest to wielomian interpolacyjny Lagrange'a). Wielomiany $P_{T,\ s-1}$ dla poszczególnych $T \in \tau_h$ można tak "skleić", że powstanie "splajn" zwany także "interpolantem" $I_h(u)$. Mamy wtedy:

- *$I_h(u) \in H^{m_0}(\Omega)$ dla pewnego $m_0 \leq s$*

- $\forall\, T \in \tau_h \quad I_h(u)_{|T} = P_{T,s-1} \in \mathcal{P}_T$,

- *jeśli* $m \leq m_0$*, to dla interpolantu zachodzi oszacowanie*

  $$(*) \qquad \|u - I_h(u)\|_{\Omega,m} \leq Ch^{s-m}|u|_{\Omega,s},$$

  gdzie stała C *nie zależy od* h*, zaś* $|\cdot|_{\Omega,s}$ *jest* s*-tą seminormą z przestrzeni Sobolewa* $H^s(\Omega)$*.* ∎

Nierówność $(*)$ z Twierdzenia Brambla-Hilberta wskazuje na to, czego można oczekiwać po metodach typu MES. Jeśli bowiem, na przykład $V = H^m(\Omega)$, $u \in H^s(\Omega)$, $m < s$, gdzie u jest rozwiązaniem zadania różniczkowego, $u_h \in V_h$ jest rozwiązaniem zadania przybliżonego przez MES oraz $I_h(u) \in V_h \subset H^m(\Omega)$, to z Twierdzenia Céa wynika

$$\|u - u_h\|_{\Omega,m} \leq \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\Omega,m} \leq \frac{M}{\gamma}\|u - I_h(u)\|_{\Omega,m} \leq Ch^{s-m}|u|_{\Omega,s}.$$

Mamy stąd oszacowanie szybkości zbieżności metody, w zależności od tego, w jakiej normie $\|\cdot\|_{\Omega,m}$ chcemy to oszacowanie otrzymać, oraz od **regularności rozwiązania** u**.**

Dla przestrzeni MES, której elementami są "splajny" to jest funkcje kawałkami wielomianowe, możemy naogół konstruować bazy, których elementami są funkcje o **małych nośnikach**. Niech

$$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_{N_h}$$

będzie taką właśnie bazą przestrzeni V_h. Gdy forma dwuliniowa

$$a : V \times V \to \mathbf{R}$$

jest formą całkową, to elementy $a_{i,j} = a(\Phi_j, \Phi_i)$ macierzy A_h układu równań algebraicznych liniowych $A_h\bar{c} = \bar{l}$, otrzymanego w konsekwencji stosowania MES, będą znikały dla i i j różniących się dostatecznie dużo. Oznacza to, że **macierz** A_h **ma budowę pasmową**.

Przykłady - patrz **Zadania z ćwiczeń.**