Wykład 7.

Metoda Ritza - Galerkina. (Sformułowanie abstrakcyjne.) Niech V, $(\cdot,\cdot)$ będzie przestrzenią Hilberta. Niech $\{V_h\}_{h\in\omega}$, $V_h \subset V$ będzie rodziną podprzestrzeni skończonego wymiaru przestrzeni V. Będziemy chcieli, aby dla tej rodziny było spełnione następujące

Założenie. (Własność aproksymacji) Rodzina podprzestrzeni $\{V_h\}_{h\in\omega}$ przestrzeni V, ma *własność aproksymacji* jeśli

$$\forall_{u\in V}\ \forall_{h\in\omega}\ \exists v_h(u) \in V_h,\ \text{ że } \|v_h(u) - u\| \to 0,\ \text{ gdy } h \to 0.$$

Równanie przybliżone. Nasze sformułowanie wariacyjne

$$\text{(1)} \qquad \text{Poszukujemy } u \in V \text{ takiego, że } \ a(u,v) = lv \quad \forall_{v\in V},$$

"obetniemy" do przestrzeni V_h; to znaczy zamienimy (1) przez

$$\text{(2)} \qquad \text{Poszukujemy } u_h \in V_h \text{ takiego, że } \ a(u_h,v_h) = lv_h \quad \forall_{v_h\in V_h}.$$

Jest to *równanie przybliżone* - **Metoda "Ritza - Galerkina".**

Ponieważ przestrzenie V_h są skończonego wymiaru, to są one przestrzeniami Hilberta (są zupełne!). Ponadto formy a i l zachowują swoje własności **ograniczoności i koercywności** w przestrzeniach V_h, ze stałymi M i γ niezależnymi od h. Zatem dla zagadnienia (2) funkcjonuje Twierdzenie Laxa-Milgrama, skąd wynika, że (2) ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

Co to jest naprawdę zagadnienie (2)?

Niech

$$V_h = \operatorname{span}\{\phi_1^h, \phi_2^h, \cdots, \phi_{N_h}^h\},$$

gdzie elementy ϕ_j^h, $j = 1,2,\cdots,N_h$ są liniowo niezależne. Stąd wynika, że $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \phi_j^h c_j$, i ze względu na liniowość form a i l, równanie (2) możemy zapisać równoważnie:

$$\text{(3)} \qquad \sum_{j=1}^{N_h} a(\phi_j^h, \phi_k^h) c_j = l\phi_k^h, \quad k = 1,2,\cdots,N_h,$$

lub, używając zapisu macierzowego

$$A_h \underline{c} = \underline{l}, \tag{4}$$

gdzie

$$A_h = (a_{k,j})_{k,j=1,2,\cdots,N_h}, \quad a_{k,j} = a(\phi_j^h, \phi_k^h)$$

jest macierzą wymiaru $N_h \times N_h$,

$$\underline{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_{N_h}]^T,$$

jest wektorem, którego poszukujemy, zaś

$$\underline{l} = [l\phi_1^h, l\phi_2^h, \cdots, l\phi_{N_h}^h]^T.$$

Inaczej mówiąc, Metoda Ritza-Galerkina polega ostatecznie na rozwiązaniu układu równań algebraicznych liniowych (4).

Zbieżność. Interesuje nas, czy

$$\|u_h - u\| \to 0, \quad \text{gdy} \quad h \to 0,$$

gdzie u jest rozwiązaniem (1), zaś u_h jest rozwiązaniem (2), i jak szybko $\|u - u_h\|$ dąży do zera. Będziemy zakładać, że formy a i l są ograniczone, zaś forma a jest również koercywna.

Lemat 1. *Metoda Ritza-Galerkina jest stabilna.*

Dowód. Rozwiązanie u_h równania (2) istnieje i jest jedyne; wykorzystując koercywność i ograniczoność form otrzymamy

$$\gamma \|u_h\|^2 \leq a(u_h, u_h) = |lu_h| \leq \|l\| \|u_h\|,$$

zaś stąd wynika

$$\|u_h\| \leq \frac{\|l\|}{\gamma}.$$

Ta nierówność oznacza stabilność. ■

Lemat 2. *Jeśli $u \in V$ jest rozwiązaniem równania (1), zaś $u_h \in V_h$ jest rozwiązaniem równania (2), to*

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall_{v_h \in V_h}. \tag{5}$$

Komentarz. Gdyby forma a była symetryczna, (to znaczy, gdyby $\forall_{u,v\in V}\ a(u,v) = a(v,u)$), to wzór (5) oznaczałby, że u_h jest rzutem ortogonalnym w sensie iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_a$, gdzie $(u,v)_a = a(u,v)$, elementu u na podprzestrzeń V_h dla tego iloczynu skalarnego. Zatem, dla normy generowanej przez ten iloczyn skalarny u_h byłby najlepszą aproksymacją w przestrzeni V_h elementu $u \in V$.

Dowód. Mamy:

$$a(u, v_h) = lv_h,$$
$$u(u_h, v_h) = lv_h,$$

$\forall v_h \in V_h$, więc odejmując stronami powyższe równości otrzymamy tezę. ■

Twierdzenie Céa. *Dla rozwiązań $u \in V$ i $u_h \in V_h$ równań (1) i (2) zachodzi oszacowanie*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|,$$

gdzie M i γ są stałymi ciągłości i koercywności formy a.

Dowód. Wykorzystując koercywność formy a i Lemat 2 otrzymamy

$$\gamma\|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) - a(u - u_h, u_h) =$$
$$= a(u - u_h, u) - a(u - u_h, v_h)$$

gdzie $v_h \in V_h$ jest dowolnym elementem. Stąd

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\gamma}\|u - v_h\|.$$

Biorąc po obu stronach ostatniej równości $\inf_{v_h \in V_h}$ otrzymamy tezę:

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \blacksquare$$

Wniosek. *Jeśli podprzestrzenie V_h mają* **własność aproksymacji**, *to metoda Ritza-Galerkina jest zbieżna.*

Dowód. Istotnie, dla $u \in V$ $\exists v_h(u) \in V_h$ takie, że $\|u - v_h(u)\| \to 0$. Zatem

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \leq \|u - v_h(u)\| \to 0. \ \blacksquare$$

Twierdzenie Céa wskazuje na to, ze jakość konkretnej wersji Metody Ritza-Galerkina zależy od tego jak zostaną wybrane przestrzenie skończonego wymiaru V_h. Mówiąc o jakości danej wersji metody mamy na myśli przede wszystkim

- szybkość zbieżności u_h do u gdy $h \to 0$,
- postać macierzy A_h układu równań (4); macierz ta jest na ogół bardzo dużego wymiaru. Zatem bardzo istotną pozytywną jej cechą byłaby jej *pasmowość*.

Metoda Elementu Skończonego (MES) - Finite Element Method (FEM) jest taką realizacją Metody Ritza-Galerkina która

- pozwala uzyskiwać oszacowania szybkości zbieżności,
- produkuje macierze A_h układu (4) o budowie pasmowej.