Wykład 6

Przykład (agitacja) Rozważamy dobrze nam znane zagadnienie brzegowe

$$-u''(t) + cu(t) = f(t), \quad t \in (o, 1) \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

Niech $V = C^1([0,1])$ i niech $V_0 = \{v \in V| \ \ v(0) = v(1) = 0\}$. Pomnożymy stronami równanie (1) przez $v \in V_0$ i scałkujemy w przedziale $(0,1)$ wykorzystując wzór na całkowanie przez części oraz uwzględniając fakt, że *wyraz brzegowy* znika; otrzymamy

$$\int_0^1 (u'(t)v'(t) + cu(t)v(t))dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

Oznaczmy:

$$a(u,v) = \int_0^1 (v'(t)u'(t) + cu(t)v(t))dt,$$

$$lv = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

Zauważmy, że

$$a : V \times V \to \mathbf{R} \ \text{ jest formą dwuliniową nad } V$$

$$l : V \to \mathbf{R} \ \text{ jest formą liniową nad } V.$$

Zatem, zagadnienie (1)(2) zastąpiliśmy innym zagadnieniem

$$\text{znajdź } \ u \in V_0, \quad \text{takie, że } \ \forall_{v \in V_0} \ \ a(u,v) = lv. \tag{3}$$

Jest to *równanie wariacyjne.* Zagadnienie (3) jest *sformułowaniem uogólnionym* zagadnienia (1),(2). Rzeczywiście, możemy uważać (3) za uogólnienie (1),(2), gdyż rozwiązanie *klasyczne* u zagadnienia (1)(2), jeśli istnieje, to spełnia równanie wariacyjne (3), zaś nie każde rozwiązanie równania wariacyjnego (3) musi spełniać (1)(2). Zauważmy, że rozwiązania równania wariacyjnego (3) nie muszą być dwukrotnie różniczkowalne: mogą być tylko jeden raz różniczkowalne!

Weźmy teraz pod uwagę inne zagadnienie brzegowe

$$-u^{''}(t) + cu(t) = f(t), \quad t \in (0,1), \tag{4}$$

$$u^{'}(0) = a, \quad u^{'}(1) = b. \tag{5}$$

Warunki brzegowe (5) możemy interpretować tak: *zadana jest pochodna normalna zewnętrzna do brzegu obszaru* $\Omega = (0,1)$, a więc jest to *warunek brzegowy Neumanna.*

Postąpimy teraz w podobny sposób jak poprzednio. Pomnożymy stronami równanie (4), tym razem jednak przez dowolny element przestrzeni $V = C^1([0,1])$. Po scałkowaniu przez części w przedziale $(0,1)$, otrzymamy

$$\int_0^1 (u^{'}(t)v^{'}(t) + cu(t)v(t))dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt - av(0) + bv(1).$$

Możemy teraz napisać *równanie wariacyjne*

$$a(u,v) = lv + gv, \tag{6}$$

gdzie

$$a : V \times V \to \mathbf{R},$$
$$l,\ g : V \to \mathbf{R},$$
$$a(u,v) = \int_0^1 (u^{'}(t)v^{'}(t) + cu(t)v(t))dt,$$
$$lv = \int_0^1 f(t)v(t)dt,$$
$$gv = bv(1) - av(0).$$

Równania wariacyjne (3) i (6) mają następującą własność: *jeśli prawa strona równania różniczkowego* f *jest ciągła w* $(0,1)$ *i jeśli* $u \in \mathbf{C^2}$ *jest rozwiązaniem, to* u *spełnia odpowiednio* (1)(2), *lub* (4)(5).

Sprawdźmy to na przykład dla (6). Niech najpierw $v \in V_0$. Ponieważ $u \in \mathbf{C^2}$ to w (6) możemy ponownie scałkować przez części i otrzymamy

$$\int_0^1 (-u^{''}(t) + cu(t) - f(t))v(t)dt = 0, \quad \forall_{v \in V_0}.$$

Ze względu na to, że $v(0) = v(1) = 0$, mamy $g(v) = 0$. Ponieważ

$$-u^{''}(t) + cu(t) - f(t), \quad t \in (0,1)$$

jest funkcją ciągłą, to warunek znikania całki dla wszystkich $v \in V_0$ pociąga

$$-u^{''}(t) + cu(t) = f(t), \quad t \in (0,1), \tag{7}$$

a więc spełnione jest równanie różniczkowe (4). Wybierzmy teraz $v \in V$; mnożąc stronami równanie (4) przez $v \in V$ i całkując przez części otrzymamy

$$a(u,v) = lv + u^{'}(1)v(1) - u^{'}(0)v(0).$$

Po odjęciu stronami równania (6), otrzymamy

$$(u^{'}(1) - b)v(1) - (u^{'}(0) - a)v(0) = 0.$$

Możemy teraz dobrać $v \in V$ tak, aby najpierw $v(0) = 1, \quad v(1) = 0$, oraz następnie tak, aby $v(0) = 0, \quad v(1) = 1$; otrzymamy

$$u^{'}(0) = a, \quad u^{'}(1) = b.$$

Widzimy więc, że spełniony jest również warunek Neumanna. ∎

Własności form a i l

Stosując nierówność Schwarza wyprowadzimy łatwo następujące nierówności

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_1\|v\|_1,$$

oraz

$$|lv| \leq L\|v\|_0 \leq L\|v\|_1,$$

gdzie M i L są stałymi. Nierówności te oznaczają **ciągłość (ograniczoność)** rozważanych form.

Nie trudno też oszacować wyrażenie $a(u,u)$ z dołu:

$$a(u,u) = \int_0^1 (u^{'}(t)^2 + cu(t)^2)dt \geq \min\{1,c\} \int_0^1 (u^{'}(t)^2) + u(t)^2)dt \geq \gamma\|u\|_1^2,$$

gdzie $\gamma = \min\{1,c\}$ w tym przypadku. Ta ostatnia nierówność oznacza **koercywność** formy a w przestrzeni V.

Sformułowania (3) i (6) są uogólnione w tym sensie, że od rozwiązania nie wymagają jego dwukrotnej różniczkowalności. Formalnie wystarczy przynależność do $V = \mathbf{C^1}([\mathbf{0}, \mathbf{1}])$. Jednak nie potrafimy udowodnić istnienia i jednoznaczności rozwiązania tak postawionego zadania. Potrzebne jest tu jeszcze większe rozszerzenie przestrzeni V_0, lub V w ten sposób, aby uzyskać ich zupełność w sensie naturalnej dla tych przestrzeni normy $\|\cdot\|_1$. Taką przestrzenią jest $H_0^1(0,1)$ dla zadania (3), zaś $H^1(0,1)$ dla zadania (6). Ze względu na gęstość V_0 lub odpowiednio V w przestrzeni $H_0^1(0,1)$, względnie $H^1(0,1)$, oraz ze względu na ograniczoność rozpatrywanych form a i l, formy te można przedłużyć w sposób zachowujący ciągłość i koercywność na przestrzenie $H_0^1(0,1)$ i $H^1(0,1)$.

Doszliśmy w ten sposób do **pełnego sformułowania uogólnionego.**

Niech $(V,(\cdot,\cdot))$ **będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta.**

Dana jest forma dwuliniowa

$$a : V\times V \to \mathbf{R},$$

- **ciągła:** $\exists_{M>0}$**, taka, że** $\forall_{u,v\in V}\quad |a(u,v)|\le M\|u\|\|v\|$**,**
- **i koercywna:** $\exists_{\gamma>0}$ **taka, że** $\forall_{u\in V}\quad \gamma\|u\|^2\le a(u,u)$

oraz forma liniowa

$$l : V\to \mathbf{R}$$

ciągła: $\exists_{L\ge 0}\quad \forall_{v\in V}\quad |lv|\le L\|v\|$**.**

$(*)$ **Poszukujemy** $u\in V$ **takiego, że** $a(u,v)=lv,\quad \forall_{v\in V}$.

Dla rozpatrywanych uprzednio przykładów należy przyjąć $H_0^1(0,1)$ dla zadania (3), zaś $H^1(0,1)$ dla zadania (6).

Zajmiemy się teraz sprawą istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia $(*)$.

Twierdzenie Laxa - Milgrama. *Niech* $(V,(\cdot,\cdot))$ *będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta,*

$$a : V\times V \to \mathbf{R},$$

formą dwuliniową **ograniczoną i koercywną,**

$$l : V\to \mathbf{R}$$

formą liniową **ograniczoną**.

Wtedy równanie wariacyjne $(*)$ *ma jednoznaczne rozwiązanie* $u \in V$.

Dowód. Ustalmy chwilowo $u \in V$;

$$v \mapsto a(u,v)$$

dla każdego $u \in V$ ustalonego jest funkcjonałem liniowym nad V. Zatem mamy operator

$$A : V \to V',$$
$$Au = a(u, \cdot),$$

gdzie V' oznacza **przestrzeń dualną do przestrzeni** V, to jest przestrzeń wszystkich funkcjonałów liniowych i ograniczonych nad przestrzenią V.

Dla przestrzeni Hilberta V zachodzi **Twierdzenie Riesza***:*

Istnieje izomorfizm liniowy (izometria)

$$\tau : V' \to_{na} V,$$

taki, że dla każdego $f \in V'$, $\tau f = v_f \in V$ *i* $\|f\| = \|v_f\|$, *oraz dla każdego* $v \in V$

$$fv = (v_f, v).$$

Mamy więc $a(u,v) = (\tau(Au), v)$, a więc $a(u,v) = lv$ można zapisać równoważnie

$$(\tau(Au), v) = (\tau(l), v).$$

Zatem nasze zadanie $(*)$ jest równoważne równaniu operatorowemu

$$(**) \qquad Au = l.$$

Zauważmy, że operator A jest **liniowy** i **ograniczony**. Liniowość wynika bezpośrednio z liniowości a.

Udowodnimy ograniczoność A. Mamy

$$\|Au\| =$$

$$= \sup_{\|w\|=1} |Auw| = \sup_{\|w\|=1} (\tau(Au), w) = \sup_{\|w\|=1} |a(u,w)| \le M\|u\|\|w\| = M\|u\|,$$

gdzie M jest stałą ciągłości formy a. To oznacza, że norma A jest ograniczona z góry przez M. Teraz pokażemy, że równanie $Au = l$ ma jednoznaczne rozwiązanie. Zastosujemy, twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Niech
$$\Phi(v) = v + \rho\tau(l - Av),$$
gdzie $\rho > 0$; mamy
$$\Phi : V \to V.$$
Udowodnimy, że można tak dobrać ρ, że Φ będzie odwzorowaniem zwężającym. Stad wyniknie, istnienie jedynego $u \in V$, takiego, że $u = \Phi(u)$, a więc $Au = l$.

Niech $v_1, v_2 \in V$.
$$\Phi(v_1) - \Phi(v_2) = v_1 - v_2 - \rho\tau(A(v_1 - v_2)).$$
Stąd:
$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|^2 = \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2\|\tau(A(v_1 - v_2))\|^2 - 2a(v_1 - v_2, v_1 - v_2).$$
Teraz skorzystamy z ograniczoności i koercywności formy a.
$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|^2 \leq$$
$$\leq \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 M^2\|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho\gamma\|v_1 - v_2\|^2 = [M^2 - 2\rho\gamma + 1]\|v_1 - v_2\|^2.$$
A więc
$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\| \leq L\|v_1 - v_2\|$$
gdzie $L^2 = M^2\rho^2 - 2\rho\gamma + 1$. Widzimy, że jeśli $0 < \rho < \frac{2\gamma}{M^2}$, to $0 \leq L < 1$. ∎