Wykład 5.

Oszacowania a priori. Stabilność w normach typu $\mathbf{L^2}$.

Rozważmy następujący bardzo prosty przykład zagadnienia brzegowego

$$-u^{''}(t) + cu(t) = f(t) \quad t \in (a,b), \quad c \leq 0 \tag{1}$$

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie klasyczne u, pomnóżmy stronami równanie (1) przez u i scałkujmy w przedziale $[a,b]$. Całkując przez części otrzymamy

$$-u^{'}(b)u(b) + u^{'}(a)u(a) + \int_a^b (u^{'}(t))^2 dt + c\int_a^b (u(t))^2 dt = \int_a^b f(t)u(t)dt, \tag{3}$$

zaś stąd, wykorzystując warunki brzegowe

$$|u|_1^2 + c\|u\|_0^2 = \int_a^b f(t)u(t)dt \leq K_1\|f\|_0\|u\|_0 \leq K_2\|f\|_0|u|_1 \leq K_3\|f\|_0\|u\|_1.$$

W ten sposób dostajemy tak zwane oszacowanie a priori rozwiązania u

$$|u|_1 \leq K_2\|f\|_0,$$

lub

$$\|u\|_0 \leq K_4\|f\|_0,$$

lub też

$$\|u\|_1 \leq K_5\|f\|_0.$$

Oszacowania te oznaczają, że rozwiązanie zależy w sposób ciągły od danych zadania. Mówimy, że zadanie (1)(2) jest dobrze postawione.

Przypuśćmy teraz, że zagadnienie (1)(2) zostało zaaproksymowane na siatce

$$t_0 = a, t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, \cdots, N+1$$

przez schemat różnicowy

$$-\frac{\nabla\Delta u_k}{h^2} + cu_k = f_k, k = 1, 2, \cdots, N,$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

Postępując w sposób analogiczny, jak w przypadku zagadnienia różniczkowego (1)(2), po uwzględnieniu wzoru na sumowanie przez części oraz nierówności Friedrichsa w wersji różnicowej, dostaniemy

$$h\sum_{j=0}^{N}(\frac{\Delta u_j}{h})^2 + ch\sum_{k=0}^{N+1} u_k^2 = \sum_{k=0}^{N+1} f_k u_k$$

zaś stąd otrzymamy oszacowania

$$\|u_h\|_h \leq C\|f_h\|_{0,h},$$

gdzie jako $\|\cdot\|_h$ można przyjąć każdą z norm $\|\cdot\|_{0,h}$ lub $\|\cdot\|_{1,h}$. Zauważmy od razu, że z tej ostatniej nierówności wynika istnienie jednoznacznego rozwiązania naszego schematu (mamy bowiem do czynienia z układem równań algebraicznych liniowych o macierzy kwadratowej!). Ten fakt, oraz otrzymane oszacowanie oznaczają *stabilność schematu* w każdej z wymienionych wyżej norm siatkowych.

Nierówności macierzowe. Normy energetyczne.

Niech A będzie macierzą kwadratową, rzeczywistą. Jeśli dla każdego wektora $x \neq 0$ mamy $(Ax, x) > 0$, to mówimy, że $A > 0$, lub że macierz jest określona dodatnio. Jeśli natomiast dla macierzy A i B zachodzi związek $A - B > 0$, to mówimy, że $A > B$. Zauważmy, że relacja $>$ dla macierzy jest jedynie porządkiem częściowym. Analogicznie, określamy nierówność nie ostrą dla macierzy w oparciu o pojęcie macierzy określonej nie ujemnie. Macierz A jest określona nie ujemnie, jeśli dla każdego wektora x, $(Ax, x) \geq 0$.

Normy Energetyczne.

Niech B będzie macierzą kwadratową wymiaru $N \times N$, rzeczywistą, symetryczną i dodatnio określoną. W naszej przestrzeni wektorowej mamy iloczyn skalarny $(u, v) = \sum_{j=1}^{N} u_j v_j$. Przy pomocy macierzy B możemy określić nowy iloczyn skalarny $(u, v)_B = (Bu, v)$, oraz związaną z nim normę $\|u\|_B = \sqrt{(u, u)_B}$. Jest to *norma energetyczna związana z macierzą B.*

Zapis macierzowy schematów różnicowych.

Niekiedy jest wygodnie zapisać schemat różnicowy (liniowy) w postaci układu równań algebraicznych liniowych

$$A_h u_h = g_h.$$

De facto jest to *rodzina układów*, gdzie $h \in \omega \subset \mathbf{R}$, gdzie ω jest rozważanym zbiorem indeksów h; jedynym jego punktem skupienia jest 0. Znajomość własności macierzy A_h może być pomocna przy badaniu stabilności rozważanego schematu. Istotnie:
Jeśli rodzina macierzy A_h, $h \in \omega$ jest wspólnie jednostajnie dodatnio określona, to znaczy, jeśli

$$\exists_{\gamma>0}, \quad \text{że} \ \ \forall_{h\in\omega} \ \ i \ \ \forall_{u_h\neq 0}, \quad (A_h u_h, u_h)_h \geq \gamma \|u_h\|_h^2,$$

to schemat jest stabilny w normie $\|\cdot\|_h$

Dowód. Mamy:

$$(g_h, u_h)_h = (A_h u_h, u_h)_h \geq \gamma \|u_h\|_h^2,$$

i stąd

$$\|u_h\|_h \leq \frac{1}{\gamma}\|g_h\|_h.$$

■

Uwaga. Jeśli stała γ jest bardzo mała, to stała w warunku stabilności $\frac{1}{\gamma}$ będzie bardzo duża. Oznacza to, że rozwiązanie u_h może być bardzo wrażliwe ze względu na zaburzenia g_h. Wtedy może być wygodnie zastosować inną normę:

$$\|g_h\|_h^2 = (A_h u_h, A_h u_h)_h = (A_h u_h, S_h S_h u_h)_h,$$

gdzie $A_h = S_h^2$ (taka macierz S_h zawsze istnieje i jest symetryczna i dodatnio określona, oraz *komutuje* z macierzą A_h). Mamy więc

$$\|g_h\|_h^2 = (S_h A_h u_h, S_h u_h)_h = (A_h S_h u_h, S_h u_h)_h \geq \gamma \|u_h\|_{A_h}^2,$$

zaś stąd ostatecznie

$$\|u_h\|_{A_h} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|g_h\|_h.$$

W ten sposób zmniejszyliśmy stałą stabilności. ■

Można podobny efekt uzyskać także inaczej. Niech $B_h = B_h^T > 0$, i przypuśćmy, że

$$\exists_{\alpha \geq 0} \text{ nie zależne od } h \text{, takie, że } (A_h u_h, u_h)_h \geq \alpha (B_h u_h, u_h)_h.$$

Wtedy mamy:

$$\alpha \|u_h\|_{B_h}^2 = \alpha (B_h u_h, u_h)_h \leq (A_h u_h, u_h)_h =$$

$$= (g_h, u_h)_h = (B_h B_h^{-1} g_h, u_h)_h = (B_h^{-1} g_h, B_h u_h)_h \leq$$

$$\leq \sqrt{(B_h^{-1} g_h, g_h)_h} \sqrt{(B_h^{-1} B_h u_h, B_h u_h)_h} =$$

$$= \|g_h\|_{B_h^{-1}} \|u_h\|_{B_h},$$

i stąd

$$\|u_h\|_{B_h} \leq \frac{1}{\alpha} \|g_h\|_{B_h^{-1}}.$$

■