Wykład 4.

Sumowanie "przez części".

Na przedziale $[a, b]$ dana jest siatka punktów

$$x_0 = a, \quad x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, \cdots, N+1, \quad h = \frac{b-a}{N+1},$$

oraz dwie funkcje siatkowe

$$u_h = \{u_0, u_1, \cdots, u_{N+1}\},$$

$$v_h = \{v_0, v_1, \cdots, v_{N+1}\}.$$

Niech

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k, \quad \text{różnica "w przód"},$$

$$\nabla u_k = u_k - u_{k-1}, \quad \text{różnica "w tył"}.$$

Nietrudno zauważyć, że

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \Delta u_j = -\sum_{j=1}^{N} u_j \nabla v_j + v_N u_{N+1} - v_0 u_1.$$

Jeśli $v_0 = 0$ i $u_{N+1} = 0$, to

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \Delta u_j = -\sum_{j=1}^{N} u_j \nabla v_j.$$

Całkowa nierówność Friedrichsa.

Niech $u : [0, L] \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Mamy wtedy dla $t \in [0, L]$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds.$$

Załóżmy, że u spełnia (lewostronnie) warunek brzegowy Dirichleta $u(0) = 0$. Wtedy $u(t) = \int_0^t u'(s) ds$, i stąd

$$|u(t)|^2 \le \int_0^t 1 ds \int_0^t |u'(s)|^2 ds = t \int_0^t |u'(s)|^2 ds \le t \|u'\|_0^2,$$

gdzie $\|\cdot\|_0$ oznacza normę przestrzeni $L^2(0,L)$. Stąd ostatecznie

$$\|u\|_0^2 = \int_0^L |u(s)|^2 ds \leq \frac{L^2}{2}\|u'\|_0^2.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób **całkową nierówność Friedrichsa**:

Jeśli $u(0)=0$, *to*

$$(*) \qquad \|u\|_0^2 \leq \frac{L^2}{2}\|u'\|_0^2.$$

W przestrzeni $C^1([0,L])$ $|u|_1 = \|u'\|_0$ jest *seminormą*, ale w jej podprzestrzeni $C_0^1([0,L])$ funkcji spełniających jednorodny warunek brzegowy Dirichleta (wystarczy lewostronnie!), $|\cdot|_1$ jest *normą*.

Przestrzenie Sobolewa.

Niech (a,b) będzie przedziałem. Zerowa przestrzeń Sobolewa:

$$H^0(a,b) = L^2(a,b).$$

Aby zdefiniować przestrzeń $H^1(a,b)$ określimy najpierw przestrzeń $G^1([a,b])$ funkcji $u:[a,b]\to\mathbf{R}$ ciągłych i mających w $[a,b]$ pochodną całkowalną z kwadratem. W $G^1([a,b])$ określimy iloczyn skalarny

$$(u,v)_1 = (u,v)_0 + (u',v')_0$$

i związaną z nim normę

$$\|u\|_1 = (u,u)_1^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $(u,v)_0 = \int_a^b u(s)v(s)ds$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $L^2(a,b)$.

Przestrzeń Sobolewa $H^1(a,b)$, to uzupełnienie przestrzeni $G^1([a,b])$ w normie $\|\cdot\|_1$.

Przez $C^\infty(a,b)$ oznaczymy przestrzeń funkcji określonych na przedziale (a,b), które mają wszystkie pochodne ciągłe, zaś przez $C_0^\infty(a,b)\subset C^\infty(a,b)$ jej podprzestrzeń funkcji o nośniku zwartym, zawartym w (a,b).

Przestrzeń Sobolewa $H_0^1(a,b)$, to uzupełnienie przestrzeni $C_0^\infty(a,b)$ w normie $\|\cdot\|_1$[1]

Mamy następujące inkluzje:

$$H_0^1(a,b) \subset H^1(a,b) \subset H^0(a,b).$$

W przestrzeni $G^1([a,b])$, a więc także i w przestrzeni $H^1(a,b)$ $|u|_1 = \|u'\|_0$ jest *seminormą* (zastanów się dlaczego?). Natomiast w $H_0^1(a,b)$, $|u|_1$ jest **normą równoważną** normie $\|\cdot\|_1$. Wynika to z nierówności Friedrichsa:

Oczywiście $|u|_1^2 = \|u'\|_0^2 \leq \|u\|_0^2 + \|u'\|_0^2$. Z drugiej strony, z nierówności Friedrichsa:

$$|u|_1^2 \leq \|u\|_1^2 \leq (1 + \frac{L^2}{2})|u|_1^2.$$

Uogólnienia. Niech $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ będzie obszarem ograniczonym o brzegu *kawałkami gładkim*. Analogicznie jak wyżej określimy najpierw przestrzeń $G^1(\bar{\Omega})$ funkcji ciągłych $u : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$, które mają pierwsze pochodne cząstkowe całkowalne z kwadratem na $\bar{\Omega}$. W przestrzeni $G^1(\bar{\Omega})$ określimy iloczyn skalarny

$$(u,v)_1 = (u,v)_0 + \sum_{j=1}^{d} (\frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_j} v)_0$$

i zwiazaną z nim normę $\|\cdot\|_1$.

Uzupełnienie przestrzeni $G^1(\bar{\Omega})$ w normie $\|\cdot\|_1$, to przestrzeń Sobolewa $H^1(\Omega)$.

Podobnie, uzupełnienie w tej samej normie $\|\cdot\|_1$ przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$ funkcji o nośniku zwartym, zawartym w Ω, mających wszystkie pochodne cząstkowe ciągłe w obszarze Ω, to przestrzeń Sobolewa $H_0^1(\Omega)$.

Wyższe pochodne. Oznaczmy przez α *wielowskaznik*, to jest wektor $\alpha = [i_1, i_2, \cdots, i_d]$ o współrzędnych całkowitych. Niech $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} i_j$. Niech

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_d^{i_d}} u.$$

[1] Można uważać $H_0^1(a,b)$ za zbiór tych elementów przestrzeni $H^1(a,b)$, które spełniają jednorodny warunek Dirichleta.

Określimy $G^k(\bar{\Omega})$ jako przestrzeń funkcji $u : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$ które są klasy C^{k-1}, zaś ich k-te pochodne cząstkowe są całkowalne z kwadratem na $\bar{\Omega}$. Na $G^k(\bar{\Omega})$ zdefiniujemy iloczyn skalarny

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0,$$

oraz odpowiadającą mu normę $\| \cdot \|_k$.

Uzupełnienie $G^k(\bar{\Omega})$ w normie $\| \cdot \|_k$, to przestrzeń $H^k(\Omega)$. Podobnie, uzupełnienie w tej normie przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$, to $H_0^k(\Omega)$.

Mamy w ten sposób *dwie skale przestrzeni Sobolewa:*

$$\cdots H^k(\Omega) \subset H^{k-1}(\Omega) \subset \cdots \subset H^0(\Omega),$$

oraz

$$\cdots H_0^k(\Omega) \subset H_0^{k-1}(\Omega) \subset \cdots \subset H^0(\Omega)$$

przy czym dla każdego k

$$H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega).$$

Uwagi.

- *Elementy przestrzeni $H^1(a, b)$, to funkcje ciągłe.*

  Naszkicujemy tutaj dowód tego faktu. Jeśli $u \in G^1([a, b])$, to $\forall_{x,y} \in [a, b]$

  $$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(s) ds.$$

  Stąd (nierówność Schwarza)

  $$(*) \qquad |u(y) - u(x)| \leq \sqrt{(|y - x|)} \|u\|_1.$$

  Pamiętamy, że $G^1([a, b])$ jest zbiorem gęstym w $H^1(a, b)$. Weźmy więc dowolny ciąg Cauchy'ego w $G^1([a, b])$. Z nierówności (*) wynika, że elementy tego ciągu są jednakowo ciągłe w normie *sup*, a da się także udowodnić, że są one wspólnie ograniczone. Można zatem zastosować

Twierdzenie Ascoli-Arzela, z którego wynika, że z takiego ciągu wybierzemy podciąg jednostajnie zbieżny do funkcji ciągłej. Wyciągamy też wniosek, że wszystkie takie podciągi są zbieżne do tej samej granicy, którą identyfikujemy z elementem przestrzeni $H^1(a,b)$.

Takiego faktu nie da się udowodnić dla $H^1(\Omega)$, jeśli Ω jest obszarem w $\mathbf{R^d}$, gdzie $d > 1$.

- **Twierdzenie o śladzie.** *Niech $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ będzie obszarem ograniczonym, o brzegu $\partial\Omega$ kawałkami gładkim, bez ostrzy. Wtedy istnieje operator śladu*

  $$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

  taki, że

  1.
  $$\exists_{C>0} \forall_{v \in H^1(\Omega)} \quad \|\gamma v\|_{0,\partial\Omega} \leq C \|v\|_{1,\Omega},$$

  2.
  $$\forall_{v \in G^1(\bar{\Omega})} \quad \gamma v(p) = v(p), \quad p \in \partial\Omega.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy $d = 2$, oraz gdy Ω jest prostokątem o ścianach równoległych do osi układu współrzędnych. Taki obszar ma *brzeg kawałkami gładki*, to znaczy, że daje się rozbić na skończoną liczbę *kawałków*, które dadzą się sparametryzować w przy pomocy funkcji klasy C^1. Ten brzeg jest także *pozbawiony ostrzy*, co oznacza, że w żadnym punkcie dwa kawałki brzegu nie mają wspólnej stycznej. Łatwo uogólnić ten dowód na przypadek brzegu $\partial\Omega$ opisanego innymi krzywymi.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & * & . & . & . & . & . & . & . \\
 & * & . & . & . & . & . & . & . \\
a & * & * & * & * & . & . & . & . \\
 & * & . & . & * & . & . & . & . \\
p & * & \Omega_p & . & * & r & . & \Omega & . \\
 & * & . & . & * & . & . & . & . \\
b & * & * & * & * & . & . & . & . \\
 & * & . & . & . & . & . & . & . \\
 & * & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Niech $u \in G^1(\bar{\Omega})$, wtedy $\|u\|_1 < \infty$. Niech $p = (x_0, y)$ (punkt leżący na brzegu) i położmy

$$\phi(t) = u(x_0 + t, y).$$

Wtedy

$$\phi'(t) = u_x(x_0 + t, y),$$

oraz

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)ds.$$

Stąd dla $r > 0$

$$r\phi(0) = \int_0^r \phi(t)dt - \int_0^r \int_0^t \phi'(s)dsdt.$$

Po zmianie kolejności całkowania w całce podwójnej dostaniemy

$$r\phi(0) = \int_0^r \phi(t)dt - \int_0^r (r-s)\phi'(s)ds.$$

Stosując nierówność $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$ i potem nierówność Schwarza, dostaniemy kolejno

$$r^2\phi(0)^2 \leq 2[\int_0^r 1\phi(t)dt]^2 + 2[\int_0^r \phi'(s)ds]^2 \leq$$

$$\leq 2r\int_0^r \phi(t)^2 dt + \frac{2}{3}r^3 \int_0^r \phi'(s)^2 ds,$$

oraz

$$u(x_0, y)^2 \leq \frac{2}{r}\int_0^r u(x_0 + t, y)^2 dt + \frac{2}{3}r\int_0^r u_x(x_0 + s, y)^2 ds.$$

Po scałkowaniu względem y w przedziale $[a, b]$ (patrz rysunek) dostaniemy

$$\int_a^b u(x_0, y)^2 dy \leq \frac{2}{r}\|u\|^2_{0,\Omega_p} + \frac{2}{3}r\|u_x\|^2_{0,\Omega_p}.$$

Zatem

$$\|\gamma u\|^2_{0,\Gamma_{a,b}} \leq C(\Omega_p)\|u\|^2_{1,\Omega_p}$$

i stąd otrzymujemy dla dowolnego elementu $u \in G^1(\bar{\Omega})$

$$\|\gamma u\|^2_{0,\partial\Omega} \leq C(\Omega)\|u\|^2_{1,\Omega}.$$

Wykorzystując *gęstość* $G^1(\bar{\Omega})$ w $H^1(\Omega)$ i *zupełność* przestrzeni $L^2(\partial\Omega)$, wnioskujemy, że *operator śladu* γ jest określony na całej przestrzeni $H^1(\Omega)$ i, że odwzorowuje on przestrzeń $H^1(\Omega)$ w (część) przestrzeni $L^2(\partial\Omega)$ a więc $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$.■

Różnicowa nierówność Friedrichsa. Ta nierówność jest odpowiednikiem całkowej nierówności Friedrichsa. Jest przydatna przy badaniu stabilności schematów różnicowych. Wyprowadzimy ją w przypadku jednowymiarowym.

Niech na przedziale $[0, L]$ dana będzie *siatka punktów* o stałym kroku $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \cdots, N+1$, $h = \frac{L}{N+1}$ oraz funkcja siatkowa

$$u_h = \{u_0, u_1, \cdots, u_{N+1}\}.$$

Mamy

$$u_k = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_k - u_{k-1}),$$

skąd

$$u_k = u_0 + h \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Delta u_j}{h},$$

a więc, jeśli $u_0 = 0$, to

$$u_k = h \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Delta u_j}{h}.$$

Stąd, po zastosowaniu nierówności Schwarza

$$|u_k| = \left| h \sum_{j=0}^{k-1} 1 \cdot \frac{\Delta u_j}{h} \right| \leq \sqrt{hk} \sqrt{h \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{\Delta u_j}{h})^2}.$$

Zatem

$$|u_k|^2 \leq kh \cdot h \sum_{j=0}^{N} (\frac{\Delta u_j}{h})^2,$$

oraz stąd

$$h \sum_{k=0}^{N+1} |u_k|^2 \leq h^2 \sum_{k=0}^{N+1} kh \sum_{j=0}^{N} (\frac{\Delta u_j}{h})^2 =$$

$$= h^2 \frac{N+1}{2} (N+2) h \sum_{j=0}^{N} (\frac{\Delta u_j}{h})^2.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób oszacowanie dla *dyskretnej normy* L^2

$$\|u_h\|_{0,h}^2 = h \sum_{k=0}^{N+1} |u_k|^2 \leq L^2 |u_h|_{1,h}^2,$$

gdzie $|u_h|^2_{1,h} = h\sum_{j=0}^{N}(\frac{\Delta u_j}{h})^2$. Jest to różnicowa forma nierówności Friedrichsa.

Uogólnienie. Niech $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ będzie obszarem siatkowym w $\mathbf{R^d}$. Oznaczmy jeszcze

$$\Omega^+_{h_i} = \{p \in \bar{\Omega}_h | p \in \bar{\Omega}_h \Rightarrow p + e_i h_i \in \bar{\Omega}_h\},$$

gdzie e_i jest wersorem $i-$tej osi układu współrzędnych, zaś h_i - krokiem siatki w kierunku tej osi.

Jeśli $u_h : \bar{\Omega}_h \to \mathbf{R}$, *oraz* $u_h(p) = 0$ *dla* $p \in \Gamma_h$, *to*

$$\|u_h\|^2_{0,h} \le C(\Omega) h_i \sum_{p\in\Omega^+_{h_i}} (\frac{\Delta u_h(p)}{h})^2,$$

gdzie $C(\Omega)$ *jest stałą zależną tylko od obszaru* Ω.