Wykład 3.

Stabilność - zbieżność

Twierdzenie Lax'a mówi o tym, że badanie zbieżności schematu można zastąpić dwiema prostszymi czynnościami:

- **badaniem rzędu schematu,**
- **badaniem stabilności schematu.**

Badanie rzędu schematu nie przedstawia na ogół większych trudności. O wiele trudniejsze jest stwierdzenie, czy schemat jest stabilny. Zarówno pojęcie aproksymacji globalnej, jak i pojęcie stabilności jest związane z konkretną normą (a właściwie z konkretnymi normami w przestrzeniach F_h, Φ_h, U_h). Wobec tego także metoda badania stabilności będzie zależała od konkretnej normy.

Stabilność w normie "max".

Załóżymy, że obszar Ω jest ograniczony. Wynika stąd, że obszar siatkowy Ω_h **jest zbiorem skończonym.** Weźmy pod uwagę schemat różnicowy **liniowy**

$$(L_h u_h)(p) = f_h(p), \quad p \in \Omega_h,$$

(1)

$$(l_h u_h)(p) = \phi_h(p), \quad p \in \Gamma_h.$$

Schemat ten zapiszemy wykorzystując pojęcie otoczenia siatkowego:

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q) u_h(q) = g_h(p), \quad p \in \Omega_h \cup \Gamma_h, \tag{2}$$

gdzie

$$g_h(p) = \begin{cases} f_h(p), & p \in \Omega_h, \\ \phi_h(p), & p \in \Gamma_h \end{cases},$$

zaś otoczenia siatkowe dobrane są na Ω_h i Γ_h zgodnie z zależnościami (1) .

Twierdzenie 1.(Pewien warunek dostateczny stabilności.) *Jeśli istnieje liczba $\alpha > 0$ niezależna od h taka, że*

$$[|A(p,p)| - \sum_{q \in N'_h(p)} |A(p,q)|] \geq \alpha, \quad \forall_p \in \Omega_h \cup \Gamma_h,$$

gdzie $N'_h(p) = N_h(p) \setminus \{p\}$, *to schemat* (2) *jest stabilny w normie* **max**.

Dowód. Założymy najpierw, że istnieje rozwiązanie u_h równania (2). Udowodnimy, że istnieje stała $M > 0$ taka, że dla normy **"max"**

$$\|u_h\|_h^U \le M[\|f_h\|_h^F + \|\phi_h\|_h^\Phi],$$

gdzie

$$\|u_h\|_h^U = \max_{p \in \Omega_h} |u_h(p)|,$$

$$\|f_h\|_h^F = \max_{p \in \Omega_h} |f_h(p)|,$$

$$\|\phi_h\|_h^\Phi = \max_{p \in \Gamma_h} |\phi_h(p)|.$$

Ponieważ Ω_h jest zbiorem **skończonym**, to istnieje taki punkt $p_0 \in \Omega_h$, że

$$\|u_h\|_h^U = \max_{p \in \Omega_h} |u_h(p)| = |u_h(p_0)|.$$

Mamy

$$\|g_h\|_h \ge |g_h(p_0)| =$$

$$= |\sum_{q \in N_h(p_0)} A(p_0, q) u_h(q)| = |A(p_0, p_0) u_h(p_0) + \sum_{q \in N'_h(p_0)} A(p_0, q) u_h(q)| \ge$$

$$\ge [|A(p_0, p_0)||u_h(p_0)| - \sum_{q \in N'_h(p_0)} |A(p_0, q)||u_h(q)|] \ge$$

$$\ge [|A(p_0, p_0)||u_h(p_0)| - \sum_{q \in N'_h(p_0)} |A(p_0, q)||u_h(p_0)|] =$$

$$= [|A(p_0, p_0)| - \sum_{q \in N'_h(p_0)} |A(p_0, q)|]\|u_h\|_h^U \ge \alpha \|u_h\|_h^U.$$

Zatem

$$\|g_h\|_h \ge |g_h(p_0)| \ge \alpha \|u_h\|_h^U, \quad \alpha > 0$$

i stąd

$$\alpha \|u_h\|_h^U \le \max_{p \in \Omega_h} |f_h(p)| + \max_{p \in \Gamma_h} |\phi_h(p)| = \|f_h\|_h^F + \|\phi_h\|_h^\Phi. \tag{3}$$

Ponieważ oszacowanie (3) zachodzi dla dowolnego rozwiązania równania (2), więc zachodzi także dla równania **jednorodnego**, to jest, gdy $g_h(p) = 0$, $\forall p$. Stąd wynika, że jedynym rozwiązaniem jednorodnego równania (2), które jest po prostu układem równań liniowych algebraicznych o macierzy kwadratowej, jest $u_h = 0$. A więc równanie (2) ma jednoznaczne rozwiązanie. Oznacza to stabilność w normie $''$ max$''$. |weight .1 in height .1 in

Przykład 1. Zbudujemy aproksymację różnicową równania

$$-\Delta u(p) + cu(p) = f(p), \quad p \in \Omega,$$

$$u(p) = 0, \quad p \in \partial\Omega.$$

Tutaj $c > 0$ jest stałą, Ω - to wnętrze kwadratu $[0, L] \times [0, L]$, $L > 0$. Na Ω tworzymy siatkę o stałym kroku $h = \frac{L}{N}$, zaliczając do brzegu siatkowego te punkty siatki, które leżą na brzegu $\partial\Omega$. Powstanie w ten sposób obszar siatkowy Ω_h o brzegu siatkowym Γ_h. Niech $p_{i,j} = (hi, hj)$ i $u_{i,j} \approx u(p_{i,j})$.

Nasz schemat dla punktu $p_{i,j}$:

$$-\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} - \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + cu_{i,j} = f_{i,j},$$

dla $p_{i,j} \in \Omega_h$, zaś $u_{i,j} = 0$ dla $p_{i,j} \in \Gamma_h$. Dla punktów $p \in \Omega_h$

$$N_h(p) = \begin{array}{ccc} & * & \\ * & p & * \\ & * & \end{array}$$

zaś dla punktów $p \in \Gamma_h$

$$N_h(p) = \{p\}.$$

W równaniu

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q) u_h(q) = g_h(p)$$

gdy $p \in \Omega_h$

$$A(p,q) = \begin{cases} c + \frac{4}{h^2} & \text{dla} \quad q = p \\ -\frac{1}{h^2} & \text{dla} \quad q \in N_h(p) \quad q \neq p \\ 0 & \text{dla innych} \quad q \end{cases},$$

oraz $g_h(p) = f_h(p)$. Gdy $p \in \Gamma_h$

$$A(p,p) = 1$$

oraz $g_h(p) = 0$.

Zbadamy teraz warunek stabilności. Dla $p \in \Omega_h$

$$|A(p,p)| - \sum_{q \in N'_h(p)} |A(p,q)| = c + \frac{4}{h^2} - 4\frac{1}{h^2} = c > 0,$$

dla $p \in \Gamma_h$

$$|A(p,p)| = 1 > 0,$$

zatem $\alpha = \min\{c, 1\} > 0$.

Oznacza to, że warunek dostateczny stabilności będzie spełniony, jeśli $c > 0$. Twierdzenie 1 nie chwyta zatem ważnego przypadku naszego zagadnienia, gdy $c = 0$.

Przykład 2.

Na takim samym obszarze Ω jak w Przykładzie 1, dane jest równanie różniczkowe

$$-\Delta u(p) + cu(p) = f(p), \quad c > 0, \quad p \in \Omega,$$

oraz warunek brzegowy "mieszany"

$$\delta \frac{du(p)}{dn} + \beta u(p) = \phi(p), \quad p \in \partial\Omega.$$

Obszar siatkowy Ω_h, oraz jego brzeg Γ_h będą takie same jak poprzednio. Tworzymy też tę samą aproksymację równania różniczkowego. Pozostaje więc do skonstruowania aproksymacja warunku brzegowego. Dla aproksymacji pochodnej normalnej zewnętrznej zastosujemy najpierw pierwsze różnice dzielone w przód lub w tył, zależnie od tego na której ścianie kwadratu leży punkt p.

$$\begin{array}{ccccc}
* & * & * & * & \cdots \\
* & o & o & o & \cdots \\
p & q & o & o & \cdots \\
* & o & o & o & \cdots \\
. & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & \cdots
\end{array}$$

Na przykład na lewej krawędzi kwadratu, warunek brzegowy zaaproksymujemy przez

$$\delta \frac{u(p) - u(q)}{h} + \beta u(p) = \phi(p).$$

Mamy więc dla $p \in \Gamma_h$

$$A(p,q) = \begin{cases} \frac{\delta}{h} + \beta & q = p \\ \frac{-\delta}{h} & q \neq p \end{cases}$$

przy tym

$$N_h(p) = \{p, q\}$$

Tak samo, jak poprzednio:

$$A(p,q) = \begin{cases} c + \frac{4}{h^2} & p = q \\ -\frac{1}{h^2} & p \neq q \end{cases}$$

i dla $p \in \Omega_h$

$$N_h(p) = \begin{matrix} & * & \\ * & * & * \\ & * & \end{matrix} .$$

Widać stąd, że schemat będzie stabilny, gdy znaki β i δ są jednakowe. Nasze twierdzenie nie odpowiada na pytanie o stabilność, gdy $\beta = 0$.

Powyższa aproksymacja warunku brzegowego ma jednak wadę: wewnątrz obszaru schemat jest aproksymowany z rzędem 2, zaś na brzegu tylko z rzędem 1. Globalna aproksymacja ma zatem jedynie rząd 1. Zgodnie z Twierdzeniem Laxa, ta aproksymacja warunku brzegowego może spowodować zmniejszenie szybkości zbieżności całego schematu.

Zadanie 1. Zaproponuj inną konstrukcję warunku brzegowego, taką aby cały schemat był rzędu 2. Można przy tem założyć, że równanie różniczkowe jest spełnione także na brzegu obszaru. Zbadaj stabilność.

Kryterium stabilności w normie "max" wyrażone w Twierdzeniu 1 jest dość słabe. Widzieliśmy to na przykładzie równania $-\Delta u = f$. Dla schematów liniowych postaci (2) zbudujemy teraz mocniejsze kryterium.

Wygodnie będzie oznaczyć

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h.$$

Założymy, że $\bar{\Omega}_h$ **jest zbiorem skończonym** oraz, że jest sumą mnogościową **dwóch rozłącznych zbiorów** Ω_h^1 i Ω_h^2:

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h^1 \cup \Omega_h^2, \quad \Omega_h^1 \cap \Omega_h^2 = \emptyset,$$

przy czym spełnione są następujące warunki

1.

$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad A(p,p) > 0,$$

$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad \forall_{q\in N_h'(p)} \quad A(p,q) \le 0,$$

$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q) \ge 0.$$

2.

$$\forall_{p\in\Omega_h^1} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q) \ge 0 \quad \textbf{zaś} \quad \forall_{q\in_h N_h'(p)} \quad A(p,q) < 0,$$

$$\forall_{p\in\Omega_h^2} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q) > 0 \quad \textbf{zaś} \quad \forall_{q\in_h N_h'(p)} \quad A(p,q) \le 0.$$

3. Obszar siatkowy $\bar{\Omega}_h$ ma następującą własność: dla każdego punktu $p \in \Omega_h^1$ istnieje punkt $s \in \Omega_h^2$ oraz punkty $p_j \in \Omega_h^1$ dla $j = 1, 2, \cdots, r$ takie, że $p_1 \in N_h(p)$, $p_2 \in N_h(p_1), \cdots, p_r \in N_h(p_{r-1}), s \in N_h(p_r)$

Schemat postaci (2),

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = g_h(p) \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h}, \tag{2}$$

który posiada własności (1)(2)(3) nazywa się **schematem typu dodatniego.**

Twierdzenie 2. *Niech schemat* (2) *będzie typu dodatniego. Wtedy:*

- *Jeśli*
$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \ge 0,$$
to $\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad u_h(p) \ge 0,$

- *Jeśli*
$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \le 0,$$
to $\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad u_h(p) \le 0.$

Dowód. Przypuśćmy, że $\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \geq 0$ i, że istnieje taki punkt $\tilde{p}$, że $u(\tilde{p}) < 0$. Ponieważ $\bar{\Omega}_h$ jest zbiorem skończonym, to można znaleźć taki punkt $p_0 \in \bar{\Omega}_h$, że

$$u_h(p_0) = \min_{p\in N_h(p)} u_h(p) < 0.$$

Możliwe są dwa przypadki:

1. $p_0 \in \Omega_h^2$. Wtedy $\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q) > 0$ i dla $q \in N_h'(p_0)$ $\;A(p_0,q) \leq 0$, i wtedy łatwo sprawdzić, że

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p_0,q)u_h(q) =$$

$$= [\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q)]u_h(p_0) + \sum_{q\in N_h'(p_0)} A(p_0,q)[u_h(q) - u_h(p_0)] < 0,$$

   skąd sprzeczność z założonym warunkiem

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \geq 0.$$

2. $p_0 \in \Omega_h^1$. Wtedy $\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q) \geq 0$ i dla $q \in N_h'(p_0)$ $\;A(p_0,q) < 0$, i wtedy łatwo sprawdzić, że

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p_0,q)u_h(q) =$$

$$= [\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q)]u_h(p_0) + \sum_{q\in N_h'(p_0)} A(p_0,q)[u_h(q) - u_h(p_0)] \leq 0,$$

   co jeszcze nie jest sprzeczne z założonym warunkiem

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \geq 0.$$

   Pokażemy jednak, że w $N_h(p_0)$ istnieje taki punkt q_0, że $u_h(q_0) > u_h(p_0)$. Wtedy będzie

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p_0,q)u_h(q) =$$

$$= [\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q)]u_h(p_0) + \sum_{q\in N_h'(p_0)} A(p_0,q)[u_h(q) - u_h(p_0)] < 0.$$

Pokażemy teraz, że istotnie, taki punkt $q_0 \in N_h(p_0)$ istnieje. Zauważmy najpierw, że zgodnie z p.3 definicji schematu typu dodatniego, dla punktów p_0 i s istnieje ciąg $\{p_j\}_{j=1,2,\cdots,r} \subset \Omega_h^1$ o własnościach tam opisanych. Gdyby takiego punktu $q_0 \in N_h(p_0)$ nie było, to znaczyłoby, że możnaby przyjąć $\forall_{q \in N_h(p_0)}\ \ q = p_0$ i wtedy możnaby w konsekwencji przyjąć $p_1 = p_0$. Rozumując w ten sposób, doszlibyśmy w końcu do wniosku, że można przyjąć, że $s = p_0$. To z kolei zostało wykluczone w punkcie 1. tego dowodu, gdyż $s \in \Omega_h^2$. Ostatecznie widzimy, że

- albo znajdziemy w $N_h(p_0)$ punkt q dla którego $u_h(p_0) < u_h(q)$,
- albo dojdziemy do wniosku, że $u_h(p_0) = u_h(s) < 0$, to zaś nie jest możliwe, gdyż $s \in \Omega_h^2$. Zatem zawsze w $N_h(p_0)$ musi istnieć q_0 i $u_h(q_0) > u_h(p_0) = \min_{p \in \bar{\Omega}_h} u_h(p) < 0$. |weight .1 in height .1 in

Wniosek 1. *Jeśli schemat* (2) *jest* **typu dodatniego** *i*

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = 0 \quad \forall_{p \in \bar{\Omega}_h},$$

to

$$\forall_{p \in \bar{\Omega}_h} \quad u_h(p) = 0.$$

Dowód. Wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2. |weight .1 in height .1 in

Wniosek 2. *Schemat* (2) *typu dodatniego ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie* $u_h(p), \quad p \in \bar{\Omega}_h$.

Dowód. Jest tak, ponieważ równanie (2) jednorodne, ma tylko zerowe rozwiązanie. (Patrz Wniosek 1.) |weight .1 in height .1 in

Wniosek 3. *Niech schemat* (2) *będzie* **typu dodatniego** *i rozpatrzmy drugi schemat, który różni się od niego tylko prawą stroną:*

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = g_h(p), \quad p \in \bar{\Omega}_h,$$

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q)v_h(q) = G_h(p), \quad p \in \bar{\Omega}_h.$$

Jeśli $\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad g_h(p) \leq G_h(p)$, *to,*

$$u_h(p) \leq v_h(p), \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h}.$$

Dowód. Odejmijmy od drugiego równania - pierwsze. Teraz możemy zastosować Twierdzenie 2. |weight .1 in height .1 in

Wniosek 4. *Przypuśćmy, że istnieje funkcja siatkowa*

$$\Psi_h : \bar{\Omega}_h \to \mathbf{R}$$

taka, że:

1. $\exists_M$, *(M niezależne od h), że* $\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \; 0 \leq \Psi_h(p) \leq M$,
2. $\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)\Psi_h(q) \geq 1, \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h}$,

Wtedy schemat typu dodatniego

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = g_h(p), \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h}$$

jest stabilny w normie $''\max''$**.**

Dowód. Niech $v_h(p) = K\psi_h(p)$, gdzie $K = \max_{p\in\Omega_h} |g_h(p)|$, oraz niech

$$G_h(p) = \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)v_h(q) =$$

$$= K \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)\psi_h(q) \geq K =$$

$$= \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |g_h(p)|, \quad \forall p \in \bar{\Omega}_h.$$

Zatem

$$-G_h(p) \leq g_h(p) \leq G_h(p), \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h},$$

skąd na mocy **Wniosku 3**

$$-v_h(p) \leq u_h(p) \leq v_h(p), \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h},$$

lub

$$|u_h(p)| \leq v_h(p) = \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |g_h(p)|\psi_h(p) \leq M \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |g_h(p)|.$$

Ta ostatnia nierówność oznacza stabilność w normie $''\max''$:

$$\|u\|_h^{U_h} = \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |u_h(p)| \leq M \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |g_h(p)| \leq$$

$$\leq M[\max_{p\in\Omega_h} |f_h(p)| + \max_{p\in\Gamma_h} |\phi_h(p)|] =$$

$$= M[\|f_h\|_h^{F_h} + \|\psi_h\|_h^{\Phi_h}]. \ | weight.1inheight.1in$$