Wykład 2.

Zagadnienia stacjonarne - metody różnicowe.

Rozpatrujemy równanie różniczkowe liniowe

$$Lu(p) = f(p) \text{ dla } p \in \Omega \subset \mathbf{R^d} \tag{1}$$

oraz warunki brzegowe

$$l_k u(p) = \phi_k(p) \text{ dla } p \in \Gamma_k, \tag{2}$$

dla $k = 1, 2, \cdots, l$, gdzie $\partial\Omega = \cup_k \Gamma_k$ jest brzegiem obszaru Ω. Operator L, to operator różniczkowy równania różniczkowego, operatory l_k, $k = 1, 2, \cdots, l$ to operatory warunków brzegowych. Najprostszy przykład takiego operatora l_k - to **warunek Dirichleta.** Operator ten przyporządkowuje funkcji u (argument operatora L) **jej ślad** na część brzegu Γ_k, na którym działa. Dla funkcji dostatecznie regularnych określonych na obszarze Ω istnieje **operator śladu na brzeg** (lub część brzegu obszaru). Operator ten przyporządkowuje funkcji u z dziedziną Ω pewną funkcję określoną na wspomnianej części brzegu (można sobie wyobrażać, że jest to "obcięcie" u do Γ_k.) Szczegółowo mówi o tym tak zwane **Twierdzenie o Śladzie**. Innym rodzajem operatora l_k jest **warunek Neumanna**. Taki operator przyporządkowuje funkcji u jej pochodną normalną zewnętrzną do omawianej części brzegu obszaru Ω. Jest to jeden z przypadków wspomnianego wyżej **Twierdzenia o Śladzie**; potrzeba tu oczywiście wyższej regularności funkcji u. Na przykład:

$$u(p) = \phi(p), \quad p \in \partial\Omega \quad \text{warunek Dirichleta,}$$

$$\frac{du}{dn}(p) = \psi(p), \quad p \in \partial\Omega \quad \text{warunek Neumanna.}$$

Z zagadnieniem (1)(2) związane są różne przestrzenie funkcyjne:

- $u \in U$,
- $\phi_k \in \Phi_k, \quad k = 1, 2, \cdots, l$,
- $f \in F$.

Zakładamy, że te przestrzenie są wyposażone w normy:

$$\|\cdot\|_U, \quad \|\cdot\|_F, \quad \|\cdot\|_{\Phi_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

Mamy

$$L : U \to F, \quad l_k : U \to \Phi_k.$$

Dla zagadnienia (1)(2) rozpatrujemy jego **aproksymację** różnicową

$$L_h u_h = f_h, \tag{3}$$

$$l_{k,h} u_h = \phi_{k,h}, \quad k = 1, 2, \cdots, l. \tag{4}$$

Tutaj

$$u_h \in U_h, \quad f_h \in F_h, \quad \phi_{k,h} \in \Phi_{k,h}, \text{ gdzie } U_h, \quad F_h, \quad \Phi_{k,h},$$

to **przestrzenie funkcji siatkowych**. Są to przestrzenie unormowane, z normami odpowiednio

$$\|\cdot\|_{U_h}, \quad \|\cdot\|_{F_h}, \quad \|\cdot\|_{\Phi_{k,h}}, \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

Podobnie jak dla zagadnienia (1)(2),

$$L_h : U_h \to F_h, \quad l_{k,h} : U_h \to \Phi_k.$$

Przestrzenie funkcji siatkowych są zdefiniowane na **obszarach siatkowych** Ω_h, $\Gamma_{k,h}$. Obszary takie powstają poprzez **nałożenie** siatki prostokątnej, o osiach równoległych do osi układu współrzędnych na obszar Ω. Węzły siatki klasyfikujemy jako **wewnętrzne i brzegowe**. Punkty brzegowe leżą na brzegu Ω, lub w bezpośrednim jego sąsiedztwie. Jeśli **brzeg siatkowy** nie zawiera się w "prawdziwym" brzegu, warunki brzegowe trzeba przenieśņa brzeg siatkowy. Do tego służą specjalne procedury, o których będzie mowa w dalszej części wykładu. Dla obszarów ograniczonych, przestrzenie funkcji siatkowych są z reguły skończonego wymiaru. Siatkę charakteryzuje liczba h zwana **krokiem siatki**. Jest to maksymalna długośķrawędzi kostek elementarnych z których zbudowana jest siatka. Ponieważ jesteśmy zainteresowani tym, co dzieje się, gdy $h \to 0$, nasze rozważania dotyczą z reguły **rodzin siatek** zależnych od parametru h, gdzie h jest elementem pewnego zbioru liczb rzeczywistych dodatnich ω, mającego jedyny punkt skupienia w zerze.

Przykłady norm w przestrzeniach siatkowych. (Dla przestrzeni U_h.)

- **Norma "max".** Niech $\underline{u}_h = \{u(p) | p \in \Omega_h\}$.

$$\|\underline{u}_h\|_{h,\infty} = \max_{p \in \Omega_h} |u_h(p)|.$$

- **Norma** L^2_h. Niech $\underline{u}_h = \{u(p) | p \in \Omega_h\}$.

$$\|\underline{u}_h\|_{h,2} = (h_x h_y \sum_{p \in \Omega_h} |u_h(p)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

  Ten przykład dotyczy obszaru siatkowego w $\mathbf{R}^2$, o stałych krokach h_x i h_y w kierunku *osi* x i *osi* y układu współrzędnych.

Przestrzenie U i U_h, F i F_h, Φ_k i $\Phi_{k,h}$ i zagadnienia (1)(2) i (3)(4) nie są oczywiście zupełnie niezależne od siebie. Omówimy teraz związki które między poszczególnymi parami powinny zachodzi¸

Przestrzenie funkcji siatkowych stanowią **aproksymację** odpowiadających im przestrzeni funkcyjnch U, F i Φ_k. Związek między takimi parami przestrzeni ustalają **operatory obcięcia**. Tak więc mamy:

$$r_h^U : U \to U_h,$$

$$r_h^F : F \to F_h,$$

$$r_h^{\Phi_k} : \Phi_k \to \Phi_{k,h}.$$

Niekiedy wygodnie jest wprowadzic również **operatory przedłużenia**, na przykład

$$p_h^U : U_h \to U.$$

Z reguły, jako p_h^U przyjmuje się pewne izomorfizmy liniowe przestrzeni U_h w przestrzeń U. Operator p_h^U spełnia do pewnego stopnia rolę odwrotności operatora obcięcia.

Niech

$$\pi_h^U = p_h^U r_h^U : U \to U.$$

Ten operator określa jakość aproksymacji przestrzeni U przez **rodzinę trójek**

$$\{U_h, r_h^U, p_h^U\}_{h \in \omega}. \quad (5)$$

Definicja. Zbieżność aproksymacji. Mówimy, że aproksymacja (5) przestrzeni U **jest zbieżna**, jeśli

$$\pi_h^U \to I,$$

gdy $h \to 0$, silnie [1].

W teorii metod różnicowych, na ogół nie używa się operatorów przedłużenia, gdyż wystarczają do jej opisania operatory obcięcia. Zakłada się natomiast, że **normy w przestrzeniach funkcji siatkowych są zgodne z ich odpowiednikami w przestrzeniach, które one aproksymują.**

Definicja. Zgodność norm.[2] Niech będzie dana przestrzeń unormowana $(U, \|\cdot\|)$ i rodzina $\{U_h, \|\cdot\|_h, r_h^U\}_{h\in\omega}$. Normy $\|\cdot\|_h$ **są zgodne z normą** $\|\cdot\|$ jeśli

$$\forall_{u\in U} \quad \|r_h^U u\|_h \to \|u\|$$

gdy $h \to 0$.

Zapis "operatorowy" równania różnicowego. Zauważmy, że każde równanie określone na obszarze siatkowym Ω_h można zapisać w następujący sposób

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = f_h(p) \quad p \in \Omega_h \cup \Gamma_h. \tag{6}$$

Tutaj:

- $N_h(p)$ jest **otoczeniem siatkowym punktu** p. Takie otoczenie składa się z tych punktów siatki Ω_h, które chcemy uwzględniw równaniu dla tego punktu.
- $A(p,q)$ jest pewną funkcją określoną na $(\Omega_h \cup \Gamma_h) \times (\Omega_h \cup \Gamma_h)$ (jeśli nasze równanie jest **nieliniowe**, to może ona także zależeć od u_h). Funkcja ta określa współczynniki równania.

[1] Rodzina operatorów P_h zbiega silnie do operatora P w przestrzeni Banacha X, gdy $h \to 0$, jeśli $\|(P_h - P)x\| \to 0 \ \forall_{x\in X}$

[2] Ten warunek zgodności norm zastępuje warunek zbieżności aproksymacji wyrażony przy użyciu operatorów π_h^U.

Nasze równanie (6) może odpowiadać zarówno aproksymacji równania różniczkowego, jak i aproksymacji warunków brzegowych. Wszystko zależy od definicji $N_h(p)$!

Przykład. Dla równania $-\Delta u(p) = f(p)$, dla $p \in \Omega_h$, $u(0) = u(1) = 0$ gdzie $\Omega = [0,1]$ tworzymy aproksymację różnicową na siatce

$$\Omega_h = \{0, h, 2h, \cdots, Nh\}$$

gdzie $h = \frac{1}{N}$, $\Gamma_h = \{0,1\}$:

$$-\frac{[u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}]}{h^2} = f_k, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2 \cdots, N-1$$

$$u_0 = u_N = 0.$$

Tutaj $N_h(p) = \{(k-1)h, kh, (k+1)h\}$ dla $p_k = h, 2h \cdots, (N-1)h$, zaś $N_h(0) = \{0\}$ i $N_h(Nh) = \{Nh\}$.

Dla Ω_h:

$$A(p,q) = \begin{cases} \frac{-1}{h^2} \text{ dla } q \in N_h'(p) = N_h(p) \setminus \{p\} \\ \frac{2}{h^2} \text{ dla } q = p \\ 0 \text{ dla } q\acute{n}ot \in N_h(p) \end{cases}$$

Dla Γ_h:

$$A(p,q) = \begin{cases} 1 \text{ dla } q = p \\ 0 \text{ dla } q\acute{n}ot = p \end{cases}$$

$f_h(p) = f(p)$ dla $p \in \Omega_h$,
$f_h(p) = 0$ dla $p \in \Gamma_h$.

Teoria Laxa zbieżności schematów różnicowych

Powróćmy do abstrakcyjnego sformułowania naszego problemu. Dane jest zagadnienie brzegowe

(1) $$Lu = f, \quad u \in U, \quad f \in F,$$

(2) $$lu = \phi, \quad u \in U, \quad \phi \in \Phi,$$

gdzie $L : U \to F$; $l : U \to \Phi$ i U, F, Φ są pewnymi przestrzeniami unormowanymi. Zakładamy, że zagadnienie brzegowe (1)(2) jest dobrze postawione, to znaczy, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie, które zależy w sposób ciągły od **danych** zadania. Równaniom (1)(2) przyporządkujemy odpowiedni zestaw równań różnicowych (schemat różnicowy)

$$L_h u_h = f_h, \quad u_h \in U_h, \quad f_h \in F_h, \tag{3}$$

$$l_h u_h = \phi_h, \quad , \phi_h \in \Phi_h \tag{4}$$

gdzie U_h, F_h, Φ_h są unormowanymi przestrzeniami funkcji siatkowych, określonych na rodzinie obszarów siatkowych Ω_h, takich że $h \to 0$.

Definicja. Zbieżność. Schemat różnicowy (3)(4) jest zbieżny, jeśli

$$\|r_h^U u - u_h\|_h^{U_h} \to 0, \quad \text{gdy} \quad h \to 0,$$

gdzie $u \in U$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1)(2), zaś $u_h \in U_h$, rozwiązaniem zagadnienia (3)(4).

Definicja. Aproksymacja lokalna. Schemat (3)(4) aproksymuje zagadnienie (1)(2) na rozwiązaniu u w punkcie $p \in \Omega_h$ z rzędem q, jeśli

$$L_h r_h^U u(p) - f_h(p) = O(h^q),$$

$$l_h r_h^U u(p) - \phi_h(p) = O(h^q).[3]$$

Definicja. Aproksymacja globalna. Schemat (3)(4) aproksymuje zagadnienie (1)(2) na rozwiązaniu u globalnie z rzędem q, jeśli

$$\|L_h r_h^U u - f_h\|_h^{F_h} = O(h^q),$$

$$\|l_h r_h^U u - \phi_h\|_h^{\Phi_h} = O(h^q).$$

[3]Dla wyrażenia w, równość $w = O(h^r)$ oznacza, że zachodzi oszacowanie $\|w\| \le Kh^r$, gdy $h \to 0$, gdzie stała K nie zależy od h.

Definicja. Stabilność. Schemat (3)(4) **jest stabilny**, jeśli istnieje $h_0 > 0$, że:

- dla $h < h_0$ zagadnienie (3)(4) ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych $f_h \in F_h$ i $\phi_h \in \Phi_h$,
- istnieje stała M (nie zależna od h) taka, że dla dowolnego rozwiązania u_h zadania (3)(4) zachodzi oszacowanie

$$\|u_h\|_h^{U_h} \leq M[\|f_h\|_h^{F_h} + \|\phi_h\|_h^{\Phi_h}].$$

Twierdzenie Laxa. *Jeśli schemat* (3)(4) *aproksymuje globalnie zagadnienie* (1)(2) *na jego rozwiązaniu* u *z rzędem* $q \geq 1$ *i jest stabilny, to schemat jest zbieżny i zachodzi oszacowanie*

$$\|r_h^U u - u_h\|_h^{U_h} = O(h^q).$$

Dowód. Z założenia o aproksymacji wynika, że

$$\|L_h r_h^U u - f_h\|_h^{F_h} = O(h^q),$$

$$\|l_h r_h^U u_h - \phi_h\|_h^{\Phi_h} = O(h^q).$$

Ponadto

$$\|L_h u_h - f_h\|_h^{F_h} = 0$$

$$\|l_h u_h - \phi_h\|_h^{\Phi_h} = 0.$$

Dodając stronami do pierwszego równania trzecie i do drugiego czwarte po zmianie znaku pod normą, dostaniemy:

$$\|L_h(r_h^U u - u_h)\|_h^{F_h} = O(h^q),$$

$$\|l_h(r_h^U u - u_h)\|_h^{\Phi_h} = O(h^q).$$

Ponieważ schemat (3)(4) jest stabilny, to zagadnienie

(5) $$L_h(r_h^U u - u_h) = O(h^q),$$

(6) $$l_h(r_h^U u - u_h) = O(h^q).$$

(patrz odsyłacz [4])) ma jednoznaczne rozwiązanie $r_h^U u - u_h$ i istnieje stała M taka, że

$$\|r_h^U u - u_h\|_h^U \leq MO(h^q) = O(h^q). \blacksquare$$

Uwaga. Warunek zbieżności schematu różnicowego

$$\|r_h^U u - u_h\|_h^{U_h} \to 0$$

odbiega od podanego wcześniej warunku zbieżności aproksymacji przestrzeni. W tym ostatnim przypadku porównujemy elementy w przestrzeni U, podczas gdy tutaj **dla każdego h, szacowanie odbywa się w innej przestrzeni i innej normie.** Zwróćmy jednak uwagę na to, że założyliśmy również **warunek zgodności norm**, który sprowadza wszystko "do wspólnego mianownika". Użyta w Teorii Laxa definicja zbieżności - to tak zwana **zbieżność dyskretna**. Powrócimy jeszcze dalej do sprawy wzajemnej zależności wspomnianych dwóch pojęć.
