Wykład 1

Wstęp

Klasyfikacja zagadnień

Przyjmijmy, dla naszych celów, taką klasyfikację zagadnień rozpatrywanych dla równań różniczkowych cząstkowych:

- **I. Zagadnienia stacjonarne**
- **II. Zagadnienia ewolucyjne**

I. Typowy przykład zagadnienia stacjonarnego:

$$-\Delta u(p) = f(p) \text{ dla } p \in \Omega \subset \mathbf{R^n}, \tag{1}$$

$$u(p) = \phi(p) \text{ dla } p \in \partial\Omega, \tag{2}$$

Jest to równanie Poissona z warunkiem brzegowym Dirichleta.

Klasyfikacja operatorów różniczkowych drugiego rzędu

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(p)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u + \sum_{j=1}^{d} b_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}u + c(p)u$$

$A(p) = (a_{i,j}(p))$ jest macierzą współczynników: $A(p)^T = A(p)$.

- Jeśli $A(p)$ jest dodatnio określona (piszemy $A(p) > 0$), to operator L jest eliptyczny w punkcie p,
- jeśli $A(p)$ ma $d-1$ dodatnich wartości własnych i jedną ujemną, to operator L jest hiperboliczny w punkcie p,
- jeśli $A(p)$ jest określona nieujemnie, ale nie jest określona dodatnio, zaś macierz $[A(p)|b(p)]$ jest rzędu d, to operator L jest paraboliczny w punkcie p.

$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ - to Laplasjan; $-\Delta$ jest operatorem eliptycznym.

II. Przykłady zagadnień ewolucyjnych.

- **Równanie hiperboliczne pierwszego rzędu**

(1)
$$\frac{\partial}{\partial t}u + c\frac{\partial}{\partial x}u = 0$$

c - stała, t - "czas", x - "przestrzeń". Zmienne niezależne t i x są traktowane odmiennie !

Stawiane zagadnienia:

1.

(1)
$$\frac{\partial}{\partial t}u + c\frac{\partial}{\partial x}u = 0,$$

(2)
$$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

zagadnienie początkowe (Cauchy'ego)

2.

(1)
$$\frac{\partial}{\partial t}u + c\frac{\partial}{\partial x}u = 0,$$

(2)
$$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^+,$$

(3)
$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

dla $c > 0$. Jest to zagadnienie mieszane początkowo - brzegowe.

Łatwo zauważyć, że $u(t,x) = \phi(x-ct)$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy-ego, jeśli ϕ jest klasy C^1. Takie rozwiązanie można interpretować jako "przesuwanie" warunku początkowego w czasie - konwekcja.

- **Równanie hiperboliczne drugiego rzędu**

(1)
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0$$

dla $a > 0$.

1. Zagadnienie Cauchy'ego:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0,$$

$$(2) \qquad u(0,x) = \phi_1(x), \quad u_t(0,x) = \phi_2(x).$$

dla $x \in \mathbf{R}$.

2. Zagadnienie mieszane:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0$$

$$(2) \qquad u(0,x) = \phi_1(x), \quad u_t(0,x) = \phi_2(x),$$

dla $x \in [0, L]$ -warunki początkowe,

$$(3) \qquad u(t,0) = \psi_1(t), \quad u(t,L) = \psi_2(t)$$

dla $t \in [0, T]$ - warunki brzegowe.

Charakter rozwiązania. Będziemy poszukiwać rozwiązania postaci

$$u(t,x) = e^{i(\alpha x + \gamma t)}.$$

Po podstawieniu do równania znajdziemy:

$$u(t,x) = e^{i[\alpha(x+\sqrt{a}t)]}$$

podobnie jak w przypadku równania rzędu 1, jest także przesuwanie, ale bardziej złożone. W obu przypadkach są to "zjawiska falowe".

- **Równanie paraboliczne**

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}u = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \quad a > 0.$$

Zagadnienia stawiane:

1. Zagadnienie Cauchy'ego

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}u = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \quad a > 0,$$

$$(2) \qquad u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

2. Zagadnienie mieszane

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \quad a > 0,$$

(2) $$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in [0,L]$$

(3) $$u(t,0) = \psi_1(t), \quad u(t,L) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T]$$

Charakter rozwiązania. Podobnie jak poprzednio, poszukujemy rozwiązania postaci

$$u(t,x) = e^{i(\alpha x + \gamma t)}.$$

Po wstawieniu do równania otrzymamy:

$$u(t,x) = e^{i\alpha x - a\alpha^2 t} = e^{i\alpha x}e^{-a\alpha^2 t}, \quad a > 0.$$

Charakter rozwiązania jest zupełnie inny niż w przypadku zagadnień z równaniami typu hiperbolicznego. Nie ma tu zjawiska unoszenia, natomiast występuje czynnik $e^{-a\alpha^2 t}$, który "przygniata" rozwiązanie w miarę upływu czasu. Rozważane równanie opisuje proces rozchodzenia się ciepła.