Krzysztof Moszyński

DWANAŚCIE WYKŁADÓW Z METOD NUMERYCZNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

Skrypt do przedmiotu

1000 - 135NRC

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
WYDZIAŁ MIM 2003/2004

Dziękuje wszystkim moim studentom, którzy znaleźli liczne błędy w tym skrypcie i mi o nich donieśli.

Specjalne podziękowanie składam

Pani Katarzynie Piaskowskiej

za zrobienie pełnej korekty tego tekstu.

Krzysztof Moszyński

Wykład 1

Wstęp
Klasyfikacja zagadnień

Przyjmijmy, dla naszych celów, taką klasyfikację zagadnień rozpatrywanych dla równań różniczkowych cząstkowych:

- **I. Zagadnienia stacjonarne**
- **II. Zagadnienia ewolucyjne**

I. Typowy przykład zagadnienia stacjonarnego:

$$-\Delta u(p) = f(p) \text{ dla } p \in \Omega \subset \mathbf{R^n}, \tag{1}$$

$$u(p) = \phi(p) \text{ dla } p \in \partial\Omega, \tag{2}$$

Jest to równanie Poissona z warunkiem brzegowym Dirichleta.

Klasyfikacja operatorów różniczkowych drugiego rzędu

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(p)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u + \sum_{j=1}^{d} b_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}u + c(p)u$$

$A(p) = (a_{i,j}(p))$ jest macierzą współczynników: $A(p)^T = A(p)$.

- Jeśli $A(p)$ jest dodatnio określona (piszemy $A(p) > 0$), to operator L jest eliptyczny w punkcie p,
- jeśli $A(p)$ ma $d-1$ dodatnich wartości własnych i jedną ujemną, to operator L jest hiperboliczny w punkcie p,
- jeśli $A(p)$ jest określona nieujemnie, ale nie jest określona dodatnio, zaś macierz $[A(p)|b(p)]$ jest rzędu d, to operator L jest paraboliczny w punkcie p.

$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ - to Laplasjan; $-\Delta$ jest operatorem eliptycznym.

II. Przykłady zagadnień ewolucyjnych.

- **Równanie hiperboliczne pierwszego rzędu**

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u + c\frac{\partial}{\partial x}u = 0$$

c - stała, t - "czas", x - "przestrzeń". Zmienne niezależne t i x są traktowane odmiennie !

Stawiane zagadnienia:

1.

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u + c\frac{\partial}{\partial x}u = 0,$$

(2) $$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

zagadnienie początkowe (Cauchy'ego)

2.

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u + c\frac{\partial}{\partial x}u = 0,$$

(2) $$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^+,$$

(3) $$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

dla $c > 0$. Jest to zagadnienie mieszane początkowo - brzegowe.

Łatwo zauważyć, że $u(t,x) = \phi(x-ct)$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy-ego, jeśli ϕ jest klasy C^1. Takie rozwiązanie można interpretować jako "przesuwanie"warunku początkowego w czasie - konwekcja.

- **Równanie hiperboliczne drugiego rzędu**

(1) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0$$

dla $a > 0$.

1. Zagadnienie Cauchy'ego:

(1) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0,$$

(2) $$u(0,x) = \phi_1(x), \quad u_t(0,x) = \phi_2(x).$$

dla $x \in \mathbf{R}$.

2. Zagadnienie mieszane:

(1) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0$$

(2) $$u(0,x) = \phi_1(x), \quad u_t(0,x) = \phi_2(x),$$

dla $x \in [0, L]$ -warunki początkowe,

(3) $$u(t,0) = \psi_1(t), \quad u(t,L) = \psi_2(t)$$

dla $t \in [0, T]$ - warunki brzegowe.

Charakter rozwiązania. Będziemy poszukiwać rozwiązania postaci

$$u(t,x) = e^{i(\alpha x + \gamma t)}.$$

Po podstawieniu do równania znajdziemy:

$$u(t,x) = e^{i[\alpha(x+\sqrt{a}t)]}$$

podobnie jak w przypadku równania rzędu 1, jest także przesuwanie, ale bardziej złożone. W obu przypadkach są to "zjawiska falowe".

- **Równanie paraboliczne**

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \quad a > 0.$$

Zagadnienia stawiane:

1. Zagadnienie Cauchy'ego

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \quad a > 0,$$

(2) $$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

2. Zagadnienie mieszane

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \quad a > 0,$$

(2) $$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in [0, L]$$

(3) $$u(t,0) = \psi_1(t), \quad u(t,L) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T]$$

Charakter rozwiązania. Podobnie jak poprzednio, poszukujemy rozwiązania postaci

$$u(t,x) = e^{i(\alpha x + \gamma t)}.$$

Po wstawieniu do równania otrzymamy:

$$u(t,x) = e^{i\alpha x - a\alpha^2 t} = e^{i\alpha x}e^{-a\alpha^2 t}, \quad a > 0.$$

Charakter rozwiązania jest zupełnie inny niż w przypadku zagadnień z równaniami typu hiperbolicznego. Nie ma tu zjawiska unoszenia, natomiast występuje czynnik $e^{-a\alpha^2 t}$, który "przygniata" rozwiązanie w miarę upływu czasu. Rozważane równanie opisuje proces rozchodzenia się ciepła.

Wykład 2.

Zagadnienia stacjonarne - metody różnicowe.

Rozpatrujemy równanie różniczkowe liniowe

$$Lu(p) = f(p) \text{ dla } p \in \Omega \subset \mathbf{R^d} \tag{1}$$

oraz warunki brzegowe

$$l_k u(p) = \phi_k(p) \text{ dla } p \in \Gamma_k, \tag{2}$$

dla $k = 1, 2, \cdots, l$, gdzie $\partial\Omega = \cup_k \Gamma_k$ jest brzegiem obszaru Ω. Operator L, to operator różniczkowy równania różniczkowego, operatory $l_k, \quad k = 1, 2, \cdots, l$ to operatory warunków brzegowych. Najprostszy przykład takiego operatora l_k - to **warunek Dirichleta.** Operator ten przyporządkowuje funkcji u (argument operatora L) **jej ślad** na część brzegu Γ_k, na którym działa. Dla funkcji dostatecznie regularnych określonych na obszarze Ω istnieje **operator śladu na brzeg** (lub część brzegu obszaru). Operator ten przyporządkowuje funkcji u z dziedziną Ω pewną funkcję określoną na wspomnianej części brzegu (można sobie wyobrażać, że jest to "obcięcie" u do Γ_k.) Szczegółowo mówi o tym tak zwane **Twierdzenie o Śladzie**. Innym rodzajem operatora l_k jest **warunek Neumanna**. Taki operator przyporządkowuje funkcji u jej pochodną normalną zewnętrzną do omawianej części brzegu obszaru Ω. Jest to jeden z przypadków wspomnianego wyżej **Twierdzenia o Śladzie**; potrzeba tu oczywiście wyższej regularności funkcji u. Na przykład:

$$u(p) = \phi(p), \quad p \in \partial\Omega \text{ warunek Dirichleta,}$$

$$\frac{du}{dn}(p) = \psi(p), \quad p \in \partial\Omega \text{ warunek Neumanna.}$$

Z zagadnieniem (1)(2) związane są różne przestrzenie funkcyjne:

- $u \in U$,
- $\phi_k \in \Phi_k, \quad k = 1, 2, \cdots, l,$
- $f \in F$.

Zakładamy, że te przestrzenie są wyposażone w normy:

$$\|\cdot\|_U, \quad \|\cdot\|_F, \quad \|\cdot\|_{\Phi_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

Mamy

$$L : U \to F, \quad l_k : U \to \Phi_k.$$

Dla zagadnienia (1)(2) rozpatrujemy jego **aproksymację** różnicową

$$L_h u_h = f_h, \tag{3}$$

$$l_{k,h} u_h = \phi_{k,h}, \quad k = 1, 2, \cdots, l. \tag{4}$$

Tutaj

$u_h \in U_h, \quad f_h \in F_h, \quad \phi_{k,h} \in \Phi_{k,h}$, gdzie $U_h, \quad F_h, \quad \Phi_{k,h}$,

to **przestrzenie funkcji siatkowych**. Są to przestrzenie unormowane, z normami odpowiednio

$$\|\cdot\|_{U_h}, \quad \|\cdot\|_{F_h}, \quad \|\cdot\|_{\Phi_{k,h}}, \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

Podobnie jak dla zagadnienia (1)(2),

$$L_h : U_h \to F_h, \quad l_{k,h} : U_h \to \Phi_k.$$

Przestrzenie funkcji siatkowych są zdefiniowane na **obszarach siatkowych** Ω_h, $\Gamma_{k,h}$. Obszary takie powstają poprzez **nałożenie** siatki prostokątnej, o osiach równoległych do osi układu współrzędnych na obszar Ω. Węzły siatki klasyfikujemy jako **wewnętrzne i brzegowe**. Punkty brzegowe leżą na brzegu Ω, lub w bezpośrednim jego sąsiedztwie. Jeśli **brzeg siatkowy** nie zawiera się w "prawdziwym" brzegu, warunki brzegowe trzeba przenieśṇa brzeg siatkowy. Do tego służą specjalne procedury, o których będzie mowa w dalszej części wykładu. Dla obszarów ograniczonych, przestrzenie funkcji siatkowych są z reguły skończonego wymiaru. Siatkę charakteryzuje liczba h zwana **krokiem siatki**. Jest to maksymalna długośķrawędzi kostek elementarnych z których zbudowana jest siatka. Ponieważ jesteśmy zainteresowani tym, co dzieje się, gdy $h \to 0$, nasze rozważania dotyczą z reguły **rodzin siatek** zależnych od parametru h, gdzie h jest elementem pewnego zbioru liczb rzeczywistych dodatnich ω, mającego jedyny punkt skupienia w zerze.

Przykłady norm w przestrzeniach siatkowych. (Dla przestrzeni U_h.)

- **Norma "max".** Niech $\underline{u}_h = \{u(p)|p \in \Omega_h\}$.

$$\|\underline{u}_h\|_{h,\infty} = \max_{p\in\Omega_h} |u_h(p)|.$$

- **Norma** L^2_h. Niech $\underline{u}_h = \{u(p)|p \in \Omega_h\}$.

$$\|\underline{u}_h\|_{h,2} = (h_x h_y \sum_{p\in\Omega_h} |u_h(p)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

  Ten przykład dotyczy obszaru siatkowego w $\mathbf{R}^2$, o stałych krokach h_x i h_y w kierunku *osi* x i *osi* y układu współrzędnych.

Przestrzenie U i U_h, F i F_h, Φ_k i $\Phi_{k,h}$ i zagadnienia (1)(2) i (3)(4) nie są oczywiście zupełnie niezależne od siebie. Omówimy teraz związki które między poszczególnymi parami powinny zachodzi¸

Przestrzenie funkcji siatkowych stanowią **aproksymację** odpowiadających im przestrzeni funkcyjnch U, F i Φ_k. Związek między takimi parami przestrzeni ustalają **operatory obcięcia**. Tak więc mamy:

$$r_h^U : U \to U_h,$$

$$r_h^F : F \to F_h,$$

$$r_h^{\Phi_k} : \Phi_k \to \Phi_{k,h}.$$

Niekiedy wygodnie jest wprowadzic również **operatory przedłużenia**, na przykład

$$p_h^U : U_h \to U.$$

Z reguły, jako p_h^U przyjmuje się pewne izomorfizmy liniowe przestrzeni U_h w przestrzeń U. Operator p_h^U spełnia do pewnego stopnia rolę odwrotności operatora obcięcia.

Niech

$$\pi_h^U = p_h^U r_h^U : U \to U.$$

Ten operator określa jakość aproksymacji przestrzeni U przez **rodzinę trójek**

(5) $$\{U_h, r_h^U, p_h^U\}_{h\in\omega}.$$

Definicja. Zbieżność aproksymacji. Mówimy, że aproksymacja (5) przestrzeni U **jest zbieżna**, jeśli

$$\pi_h^U \to I,$$

gdy $h \to 0$, silnie [1].

W teorii metod różnicowych, na ogół nie używa się operatorów przedłużenia, gdyż wystarczają do jej opisania operatory obcięcia. Zakłada się natomiast, że **normy w przestrzeniach funkcji siatkowych są zgodne z ich odpowiednikami w przestrzeniach, które one aproksymują.**

Definicja. Zgodność norm.[2] Niech będzie dana przestrzeń unormowana $(U, \|\cdot\|)$ i rodzina $\{U_h, \|\cdot\|_h, r_h^U\}_{h\in\omega}$. Normy $\|\cdot\|_h$ **są zgodne z normą** $\|\cdot\|$ jeśli

$$\forall_{u\in U} \quad \|r_h^U u\|_h \to \|u\|$$

gdy $h \to 0$.

Zapis "operatorowy" równania różnicowego. Zauważmy, że każde równanie określone na obszarze siatkowym Ω_h można zapisać w następujący sposób

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = f_h(p) \quad p \in \Omega_h \cup \Gamma_h. \tag{6}$$

Tutaj:

- $N_h(p)$ jest **otoczeniem siatkowym punktu** p. Takie otoczenie składa się z tych punktów siatki Ω_h, które chcemy uwzględniẇ równaniu dla tego punktu.
- $A(p,q)$ jest pewną funkcją określoną na $(\Omega_h\cup\Gamma_h)\times(\Omega_h\cup\Gamma_h)$ (jeśli nasze równanie jest **nieliniowe**, to może ona także zależeć od u_h). Funkcja ta określa współczynniki równania.

[1] Rodzina operatorów P_h zbiega silnie do operatora P w przestrzeni Banacha X, gdy $h \to 0$, jeśli $\|(P_h - P)x\| \to 0 \ \forall_{x\in X}$

[2] Ten warunek zgodności norm zastępuje warunek zbieżności aproksymacji wyrażony przy użyciu operatorów π_h^U.

Nasze równanie (6) może odpowiadać zarówno aproksymacji równania różniczkowego, jak i aproksymacji warunków brzegowych. Wszystko zależy od definicji $N_h(p)$!

Przykład. Dla równania $-\Delta u(p) = f(p), \quad \text{dla} \quad p \in \Omega_h, \; u(0) = u(1) = 0$ gdzie $\Omega = [0,1]$ tworzymy aproksymację różnicową na siatce

$$\Omega_h = \{0, h, 2h, \cdots, Nh\}$$

gdzie $h = \frac{1}{N}$, $\Gamma_h = \{0,1\}$:

$$-\frac{[u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}]}{h^2} = f_k, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2 \cdots, N-1$$

$$u_0 = u_N = 0.$$

Tutaj $N_h(p) = \{(k-1)h, kh, (k+1)h\}$ dla $p_k = h, 2h \cdots, (N-1)h$, zaś $N_h(0) = \{0\}$ i $N_h(Nh) = \{Nh\}$.

Dla Ω_h:

$$A(p,q) = \begin{cases} \frac{-1}{h^2} \quad \text{dla} \quad q \in N'_h(p) = N_h(p) \setminus \{p\} \\ \frac{2}{h^2} \quad \text{dla} \quad q = p \\ 0 \quad \text{dla} \quad q \acute{n} ot \in N_h(p) \end{cases}$$

Dla Γ_h:

$$A(p,q) = \begin{cases} 1 \quad \text{dla} \quad q = p \\ 0 \quad \text{dla} \quad q \acute{n} ot = p \end{cases}$$

$f_h(p) = f(p)$ dla $p \in \Omega_h$,
$f_h(p) = 0$ dla $p \in \Gamma_h$.

Teoria Laxa zbieżności schematów różnicowych

Powróćmy do abstrakcyjnego sformułowania naszego problemu. Dane jest zagadnienie brzegowe

(1) $$Lu = f, \quad u \in U, \quad f \in F,$$

(2) $$lu = \phi, \quad u \in U, \quad \phi \in \Phi,$$

gdzie $L : U \to F$; $l : U \to \Phi$ i U, F, Φ są pewnymi przestrzeniami unormowanymi. Zakładamy, że zagadnienie brzegowe (1)(2) jest dobrze postawione, to znaczy, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie, które zależy w sposób ciągły od **danych** zadania. Równaniom (1)(2) przyporządkujemy odpowiedni zestaw równań różnicowych (schemat różnicowy)

$$L_h u_h = f_h, \quad u_h \in U_h, \quad f_h \in F_h, \tag{3}$$

$$l_h u_h = \phi_h, \quad , \phi_h \in \Phi_h \tag{4}$$

gdzie U_h, F_h, Φ_h są unormowanymi przestrzeniami funkcji siatkowych, określonych na rodzinie obszarów siatkowych Ω_h, takich że $h \to 0$.

Definicja. Zbieżność. Schemat różnicowy (3)(4) jest zbieżny, jeśli

$$\|r_h^U u - u_h\|_h^{U_h} \to 0, \quad \text{gdy} \quad h \to 0,$$

gdzie $u \in U$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1)(2), zaś $u_h \in U_h$, rozwiązaniem zagadnienia (3)(4).

Definicja. Aproksymacja lokalna. Schemat (3)(4) aproksymuje zagadnienie (1)(2) na rozwiązaniu u w punkcie $p \in \Omega_h$ z rzędem q, jeśli

$$L_h r_h^U u(p) - f_h(p) = O(h^q),$$

$$l_h r_h^U u(p) - \phi_h(p) = O(h^q).\text{[3]}$$

Definicja. Aproksymacja globalna. Schemat (3)(4) aproksymuje zagadnienie (1)(2) na rozwiązaniu u globalnie z rzędem q, jeśli

$$\|L_h r_h^U u - f_h\|_h^{F_h} = O(h^q),$$

$$\|l_h r_h^U u - \phi_h\|_h^{\Phi_h} = O(h^q).$$

[3]Dla wyrażenia w, równość $w = O(h^r)$ oznacza, że zachodzi oszacowanie $\|w\| \le Kh^r$, gdy $h \to 0$, gdzie stała K nie zależy od h.

Definicja. Stabilność. Schemat (3)(4) **jest stabilny**, jeśli istnieje $h_0 > 0$, że:

- dla $h < h_0$ zagadnienie (3)(4) ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych $f_h \in F_h$ i $\phi_h \in \Phi_h$,
- istnieje stała M (nie zależna od h) taka, że dla dowolnego rozwiązania u_h zadania (3)(4) zachodzi oszacowanie

$$\|u_h\|_h^{U_h} \leq M[\|f_h\|_h^{F_h} + \|\phi_h\|_h^{\Phi_h}].$$

Twierdzenie Laxa. *Jeśli schemat* (3)(4) *aproksymuje globalnie zagadnienie* (1)(2) *na jego rozwiązaniu* u *z rzędem* $q \geq 1$ *i jest stabilny, to schemat jest zbieżny i zachodzi oszacowanie*

$$\|r_h^U u - u_h\|_h^{U_h} = O(h^q).$$

Dowód. Z założenia o aproksymacji wynika, że

$$\|L_h r_h^U u - f_h\|_h^{F_h} = O(h^q),$$

$$\|l_h r_h^U u_h - \phi_h\|_h^{\Phi_h} = O(h^q).$$

Ponadto

$$\|L_h u_h - f_h\|_h^{F_h} = 0$$

$$\|l_h u_h - \phi_h\|_h^{\Phi_h} = 0.$$

Dodając stronami do pierwszego równania trzecie i do drugiego czwarte po zmianie znaku pod normą, dostaniemy:

$$\|L_h(r_h^U u - u_h)\|_h^{F_h} = O(h^q),$$

$$\|l_h(r_h^U u - u_h)\|_h^{\Phi_h} = O(h^q).$$

Ponieważ schemat (3)(4) jest stabilny, to zagadnienie

$$L_h(r_h^U u - u_h) = O(h^q), \tag{5}$$

$$l_h(r_h^U u - u_h) = O(h^q). \tag{6}$$

(patrz odsyłacz [4])) ma jednoznaczne rozwiązanie $r_h^U u - u_h$ i istnieje stała M taka, że

$$\|r_h^U u - u_h\|_h^U \leq MO(h^q) = O(h^q). \quad \blacksquare$$

Uwaga. Warunek zbieżności schematu różnicowego

$$\|r_h^U u - u_h\|_h^{U_h} \to 0$$

odbiega od podanego wcześniej warunku zbieżności aproksymacji przestrzeni. W tym ostatnim przypadku porównujemy elementy w przestrzeni U, podczas gdy tutaj **dla każdego h, szacowanie odbywa się w innej przestrzeni i innej normie.** Zwróćmy jednak uwagę na to, że założyliśmy również **warunek zgodności norm**, który sprowadza wszystko "do wspólnego mianownika". Użyta w Teorii Laxa definicja zbieżności - to tak zwana **zbieżność dyskretna**. Powrócimy jeszcze dalej do sprawy wzajemnej zależności wspomnianych dwóch pojęć.

Wykład 3.

Stabilność - zbieżność

Twierdzenie Lax'a mówi o tym, że badanie zbieżności schematu można zastąpić dwiema prostszymi czynnościami:

- **badaniem rzędu schematu,**
- **badaniem stabilności schematu.**

Badanie rzędu schematu nie przedstawia na ogół większych trudności. O wiele trudniejsze jest stwierdzenie, czy schemat jest stabilny. Zarówno pojęcie aproksymacji globalnej, jak i pojęcie stabilności jest związane z konkretną normą (a właściwie z konkretnymi normami w przestrzeniach F_h, Φ_h, U_h). Wobec tego także metoda badania stabilności będzie zależała od konkretnej normy.

Stabilność w normie "max".

Założymy, że obszar Ω jest ograniczony. Wynika stąd, że obszar siatkowy Ω_h **jest zbiorem skończonym.** Weźmy pod uwagę schemat różnicowy **liniowy**

(1)
$$(L_h u_h)(p) = f_h(p), \quad p \in \Omega_h,$$
$$(l_h u_h)(p) = \phi_h(p), \quad p \in \Gamma_h.$$

Schemat ten zapiszemy wykorzystując pojęcie otoczenia siatkowego:

(2)
$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q) u_h(q) = g_h(p), \quad p \in \Omega_h \cup \Gamma_h,$$

gdzie

$$g_h(p) = \begin{cases} f_h(p), & p \in \Omega_h, \\ \phi_h(p), & p \in \Gamma_h \end{cases},$$

zaś otoczenia siatkowe dobrane są na Ω_h i Γ_h zgodnie z zależnościami (1) .

Twierdzenie 1.(Pewien warunek dostateczny stabilności.) *Jeśli istnieje liczba $\alpha > 0$ niezależna od h taka, że*

$$[|A(p,p)| - \sum_{q \in N'_h(p)} |A(p,q)|] \geq \alpha, \quad \forall_p \in \Omega_h \cup \Gamma_h,$$

gdzie $N_h'(p) = N_h(p) \setminus \{p\}$*, to schemat* (2) *jest stabilny w normie* **max***.*

Dowód. Założymy najpierw, że istnieje rozwiązanie u_h równania (2). Udowodnimy, że istnieje stała $M > 0$ taka, że dla normy **"max"**

$$\|u_h\|_h^U \leq M[\|f_h\|_h^F + \|\phi_h\|_h^\Phi],$$

gdzie

$$\|u_h\|_h^U = \max_{p \in \Omega_h} |u_h(p)|,$$

$$\|f_h\|_h^F = \max_{p \in \Omega_h} |f_h(p)|,$$

$$\|\phi_h\|_h^\Phi = \max_{p \in \Gamma_h} |\phi_h(p)|.$$

Ponieważ Ω_h jest zbiorem **skończonym**, to istnieje taki punkt $p_0 \in \Omega_h$, że

$$\|u_h\|_h^U = \max_{p \in \Omega_h} |u_h(p)| = |u_h(p_0)|.$$

Mamy

$$\|g_h\|_h \geq |g_h(p_0)| =$$

$$= |\sum_{q \in N_h(p_0)} A(p_0, q) u_h(q)| = |A(p_0, p_0) u_h(p_0) + \sum_{q \in N_h'(p_0)} A(p_0, q) u_h(q)| \geq$$

$$\geq [|A(p_0, p_0)||u_h(p_0)| - \sum_{q \in N_h'(p_0)} |A(p_0, q)||u_h(q)|] \geq$$

$$\geq [|A(p_0, p_0)||u_h(p_0)| - \sum_{q \in N_h'(p_0)} |A(p_0, q)||u_h(p_0)|] =$$

$$= [|A(p_0, p_0)| - \sum_{q \in N_h'(p_0)} |A(p_0, q)|] \|u_h\|_h^U \geq \alpha \|u_h\|_h^U.$$

Zatem

$$\|g_h\|_h \geq |g_h(p_0)| \geq \alpha \|u_h\|_h^U, \quad \alpha > 0$$

i stąd

$$\alpha \|u_h\|_h^U \leq \max_{p \in \Omega_h} |f_h(p)| + \max_{p \in \Gamma_h} |\phi_h(p)| = \|f_h\|_h^F + \|\phi_h\|_h^\Phi. \tag{3}$$

Ponieważ oszacowanie (3) zachodzi dla dowolnego rozwiązania równania (2), więc zachodzi także dla równania **jednorodnego**, to jest, gdy $g_h(p) = 0$, $\forall p$. Stąd wynika, że jedynym rozwiązaniem jednorodnego równania (2), które jest po prostu układem równań liniowych algebraicznych o macierzy kwadratowej, jest $u_h = 0$. A więc równanie (2) ma jednoznaczne rozwiązanie. Oznacza to stabilność w normie "max". ■

Przykład 1. Zbudujemy aproksymację różnicową równania

$$-\Delta u(p) + cu(p) = f(p), \quad p \in \Omega,$$

$$u(p) = 0, \quad p \in \partial\Omega.$$

Tutaj $c > 0$ jest stałą, Ω - to wnętrze kwadratu $[0, L] \times [0, L]$, $L > 0$. Na Ω tworzymy siatkę o stałym kroku $h = \frac{L}{N}$, zaliczając do brzegu siatkowego te punkty siatki, które leżą na brzegu $\partial\Omega$. Powstanie w ten sposób obszar siatkowy Ω_h o brzegu siatkowym Γ_h. Niech $p_{i,j} = (hi, hj)$ i $u_{i,j} \approx u(p_{i,j})$.

Nasz schemat dla punktu $p_{i,j}$:

$$-\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} - \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + cu_{i,j} = f_{i,j},$$

dla $p_{i,j} \in \Omega_h$, zaś $u_{i,j} = 0$ dla $p_{i,j} \in \Gamma_h$. Dla punktów $p \in \Omega_h$

$$N_h(p) = \begin{array}{ccc} & * & \\ * & p & * \\ & * & \end{array}$$

zaś dla punktów $p \in \Gamma_h$

$$N_h(p) = \{p\}.$$

W równaniu

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q) u_h(q) = g_h(p)$$

gdy $p \in \Omega_h$

$$A(p,q) = \begin{cases} c + \frac{4}{h^2} & \text{dla} \quad q = p \\ -\frac{1}{h^2} & \text{dla} \quad q \in N_h(p) \quad q \neq p \\ 0 & \text{dla innych} \quad q \end{cases},$$

oraz $g_h(p) = f_h(p)$. Gdy $p \in \Gamma_h$

$$A(p,p) = 1$$

oraz $g_h(p) = 0$.

Zbadamy teraz warunek stabilności. Dla $p \in \Omega_h$

$$|A(p,p)| - \sum_{q \in N_h'(p)} |A(p,q)| = c + \frac{4}{h^2} - 4\frac{1}{h^2} = c > 0,$$

dla $p \in \Gamma_h$

$$|A(p,p)| = 1 > 0,$$

zatem $\alpha = \min\{c, 1\} > 0$.

Oznacza to, że warunek dostateczny stabilności będzie spełniony, jeśli $c > 0$. Twierdzenie 1 nie chwyta zatem ważnego przypadku naszego zagadnienia, gdy $c = 0$.

Przykład 2.

Na takim samym obszarze Ω jak w Przykładzie 1, dane jest równanie różniczkowe

$$-\Delta u(p) + cu(p) = f(p), \quad c > 0, \quad p \in \Omega,$$

oraz warunek brzegowy "mieszany"

$$\delta \frac{du(p)}{dn} + \beta u(p) = \phi(p), \quad p \in \partial\Omega.$$

Obszar siatkowy Ω_h, oraz jego brzeg Γ_h będą takie same jak poprzednio. Tworzymy też tę samą aproksymację równania różniczkowego. Pozostaje więc do skonstruowania aproksymacja warunku brzegowego. Dla aproksymacji pochodnej normalnej zewnętrznej zastosujemy najpierw pierwsze różnice dzielone w przód lub w tył, zależnie od tego na której ścianie kwadratu leży punkt p.

$$\begin{array}{ccccc}
* & * & * & * & \cdots \\
* & o & o & o & \cdots \\
p & q & o & o & \cdots \\
* & o & o & o & \cdots \\
. & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & \cdots
\end{array}$$

Na przykład na lewej krawędzi kwadratu, warunek brzegowy zaaproksymujemy przez

$$\delta \frac{u(p) - u(q)}{h} + \beta u(p) = \phi(p).$$

Mamy więc dla $p \in \Gamma_h$

$$A(p,q) = \begin{cases} \frac{\delta}{h} + \beta & q = p \\ \frac{-\delta}{h} & q \neq p \end{cases}$$

przy tym

$$N_h(p) = \{p, q\}$$

Tak samo, jak poprzednio:

$$A(p,q) = \begin{cases} c + \frac{4}{h^2} & p = q \\ -\frac{1}{h^2} & p \neq q \end{cases}$$

i dla $p \in \Omega_h$

$$N_h(p) = \begin{matrix} & * & \\ * & * & * \\ & * & \end{matrix} .$$

Widać stąd, że schemat będzie stabilny, gdy znaki β i δ są jednakowe. Nasze twierdzenie nie odpowiada na pytanie o stabilność, gdy $\beta = 0$.

Powyższa aproksymacja warunku brzegowego ma jednak wadę: wewnątrz obszaru schemat jest aproksymowany z rzędem 2, zaś na brzegu tylko z rzędem 1. Globalna aproksymacja ma zatem jedynie rząd 1. Zgodnie z Twierdzeniem Laxa, ta aproksymacja warunku brzegowego może spowodować zmniejszenie szybkości zbieżności całego schematu.

Zadanie 1. Zaproponuj inną konstrukcję warunku brzegowego, taką aby cały schemat był rzędu 2. Można przy tem założyć, że równanie różniczkowe jest spełnione także na brzegu obszaru. Zbadaj stabilność.

Kryterium stabilności w normie "max" wyrażone w Twierdzeniu 1 jest dość słabe. Widzieliśmy to na przykładzie równania $-\Delta u = f$. Dla schematów liniowych postaci (2) zbudujemy teraz mocniejsze kryterium.

Wygodnie będzie oznaczyć

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h.$$

Założymy, że $\bar{\Omega}_h$ **jest zbiorem skończonym** oraz, że jest sumą mnogościową **dwóch rozłącznych zbiorów** Ω_h^1 i Ω_h^2:

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h^1 \cup \Omega_h^2, \quad \Omega_h^1 \cap \Omega_h^2 = \emptyset,$$

przy czym spełnione są następujące warunki

1.
$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad A(p,p) > 0,$$
$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad \forall_{q\in N'_h(p)} \quad A(p,q) \leq 0,$$
$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q) \geq 0.$$

2.
$$\forall_{p\in\Omega^1_h} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q) \geq 0 \quad \textbf{zaś} \quad \forall_{q\in_h N'_h(p)} \quad A(p,q) < 0,$$
$$\forall_{p\in\Omega^2_h} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q) > 0 \quad \textbf{zaś} \quad \forall_{q\in_h N'_h(p)} \quad A(p,q) \leq 0.$$

3. Obszar siatkowy $\bar{\Omega}_h$ ma następującą własność: dla każdego punktu $p \in \Omega^1_h$ istnieje punkt $s \in \Omega^2_h$ oraz punkty $p_j \in \Omega^1_h$ dla $j = 1, 2, \cdots, r$ takie, że $p_1 \in N_h(p)$, $p_2 \in N_h(p_1), \cdots, p_r \in N_h(p_{r-1}), s \in N_h(p_r)$

Schemat postaci (2),

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = g_h(p) \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h}, \tag{2}$$

który posiada własności (1)(2)(3) nazywa się **schematem typu dodatniego.**

Twierdzenie 2. *Niech schemat* (2) *będzie typu dodatniego. Wtedy:*

- *Jeśli*
$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \geq 0,$$
to $\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad u_h(p) \geq 0,$
- *Jeśli*
$$\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \leq 0,$$
to $\forall_{p\in\bar{\Omega}_h} \quad u_h(p) \leq 0.$

Dowód. Przypuśćmy, że $\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \geq 0$ i, że istnieje taki punkt $\tilde{p}$, że $u(\tilde{p}) < 0$. Ponieważ $\bar{\Omega}_h$ jest zbiorem skończonym, to można znaleźć taki punkt $p_0 \in \bar{\Omega}_h$, że
$$u_h(p_0) = \min_{p\in N_h(p)} u_h(p) < 0.$$
Możliwe są dwa przypadki:

1. $p_0 \in \Omega_h^2$. Wtedy $\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q) > 0$ i dla $q \in N_h'(p_0)$ $\;A(p_0,q) \leq 0$, i wtedy łatwo sprawdzić, że

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p_0,q)u_h(q) =$$

$$= [\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q)]u_h(p_0) + \sum_{q\in N_h'(p_0)} A(p_0,q)[u_h(q) - u_h(p_0)] < 0,$$

skąd sprzeczność z założonym warunkiem

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \geq 0.$$

2. $p_0 \in \Omega_h^1$. Wtedy $\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q) \geq 0$ i dla $q \in N_h'(p_0)$ $\;A(p_0,q) < 0$, i wtedy łatwo sprawdzić, że

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p_0,q)u_h(q) =$$

$$= [\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q)]u_h(p_0) + \sum_{q\in N_h'(p_0)} A(p_0,q)[u_h(q) - u_h(p_0)] \leq 0,$$

co jeszcze nie jest sprzeczne z założonym warunkiem

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) \geq 0.$$

Pokażemy jednak, że w $N_h(p_0)$ istnieje taki punkt q_0, że $u_h(q_0) > u_h(p_0)$. Wtedy będzie

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p_0,q)u_h(q) =$$

$$= [\sum_{q\in N_h(p_0)} A(p_0,q)]u_h(p_0) + \sum_{q\in N_h'(p_0)} A(p_0,q)[u_h(q) - u_h(p_0)] < 0.$$

Pokażemy teraz, że istotnie, taki punkt $q_0 \in N_h(p_0)$ istnieje. Zauważmy najpierw, że zgodnie z p.3 definicji schematu typu dodatniego, dla punktów p_0 i s istnieje ciąg $\{p_j\}_{j=1,2,\cdots,r} \subset \Omega_h^1$ o własnościach tam opisanych. Gdyby takiego punktu $q_0 \in N_h(p_0)$ nie było, to znaczyłoby, że możnaby przyjąć $\forall_{q \in N_h(p_0)} \; q = p_0$ i wtedy możnaby w konsekwencji przyjąć $p_1 = p_0$. Rozumując w ten sposób, doszlibyśmy w końcu do wniosku, że można przyjąć, że $s = p_0$. To z kolei zostało wykluczone w punkcie 1. tego dowodu, gdyż $s \in \Omega_h^2$. Ostatecznie widzimy, że

- albo znajdziemy w $N_h(p_0)$ punkt q dla którego $u_h(p_0) < u_h(q)$,
- albo dojdziemy do wniosku, że $u_h(p_0) = u_h(s) < 0$, to zaś nie jest możliwe, gdyż $s \in \Omega_h^2$. Zatem zawsze w $N_h(p_0)$ musi istnieć q_0 i $u_h(q_0) > u_h(p_0) = \min_{p \in \bar{\Omega}_h} u_h(p) < 0$. ∎

Wniosek 1. *Jeśli schemat* (2) *jest* **typu dodatniego** *i*

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = 0 \quad \forall_{p \in \bar{\Omega}_h},$$

to

$$\forall_{p \in \bar{\Omega}_h} \quad u_h(p) = 0.$$

Dowód. Wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2. ∎

Wniosek 2. *Schemat* (2) *typu dodatniego ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie* $u_h(p), \quad p \in \bar{\Omega}_h$.

Dowód. Jest tak, ponieważ równanie (2) jednorodne, ma tylko zerowe rozwiązanie. (Patrz Wniosek 1.) ∎

Wniosek 3. *Niech schemat* (2) *będzie* **typu dodatniego** *i rozpatrzmy drugi schemat, który różni się od niego tylko prawą stroną:*

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = g_h(p), \quad p \in \bar{\Omega}_h,$$

$$\sum_{q \in N_h(p)} A(p,q)v_h(q) = G_h(p), \quad p \in \bar{\Omega}_h.$$

Jeśli $\forall_{p\in\bar{\Omega}_h}\ \ g_h(p) \leq G_h(p)$, *to,*

$$u_h(p) \leq v_h(p), \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h}.$$

Dowód. Odejmijmy od drugiego równania - pierwsze. Teraz możemy zastosować Twierdzenie 2. ■

Wniosek 4. *Przypuśćmy, że istnieje funkcja siatkowa*

$$\Psi_h : \bar{\Omega}_h \to \mathbf{R}$$

taka, że:

1. $\exists_M$,*(M niezależne od h), że* $\forall_{p\in\bar{\Omega}_h}\ 0 \leq \Psi_h(p) \leq M$,
2. $\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)\Psi_h(q) \geq 1, \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h}$,

Wtedy schemat typu dodatniego

$$\sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)u_h(q) = g_h(p), \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h}$$

jest stabilny w normie $''\max''$**.**

Dowód. Niech $v_h(p) = K\psi_h(p)$, gdzie $K = \max_{p\in\Omega_h} |g_h(p)|$, oraz niech

$$G_h(p) = \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)v_h(q) =$$

$$= K \sum_{q\in N_h(p)} A(p,q)\psi_h(q) \geq K =$$

$$= \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |g_h(p)|, \quad \forall p \in \bar{\Omega}_h.$$

Zatem

$$-G_h(p) \leq g_h(p) \leq G_h(p), \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h},$$

skąd na mocy **Wniosku 3**

$$-v_h(p) \leq u_h(p) \leq v_h(p), \quad \forall_{p\in\bar{\Omega}_h},$$

lub

$$|u_h(p)| \leq v_h(p) = \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |g_h(p)|\psi_h(p) \leq M \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |g_h(p)|.$$

Ta ostatnia nierówność oznacza stabilność w normie $''\max''$:

$$\|u\|_h^{U_h} = \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |u_h(p)| \leq M \max_{p\in\bar{\Omega}_h} |g_h(p)| \leq$$

$$\leq M[\max_{p\in\Omega_h} |f_h(p)| + \max_{p\in\Gamma_h} |\phi_h(p)|] =$$

$$= M[\|f_h\|_h^{F_h} + \|\psi_h\|_h^{\Phi_h}]. \quad \blacksquare$$

Wykład 4.

Sumowanie "przez części".

Na przedziale $[a, b]$ dana jest siatka punktów

$$x_0 = a, \quad x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, \cdots, N+1, \quad h = \frac{b-a}{N+1},$$

oraz dwie funkcje siatkowe

$$u_h = \{u_0, u_1, \cdots, u_{N+1}\},$$

$$v_h = \{v_0, v_1, \cdots, v_{N+1}\}.$$

Niech

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k, \quad \text{różnica "w przód"},$$

$$\nabla u_k = u_k - u_{k-1}, \quad \text{różnica "w tył"}.$$

Nietrudno zauważyć, że

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \Delta u_j = -\sum_{j=1}^{N} u_j \nabla v_j + v_N u_{N+1} - v_0 u_1.$$

Jeśli $v_0 = 0$ i $u_{N+1} = 0$, to

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \Delta u_j = -\sum_{j=1}^{N} u_j \nabla v_j.$$

Całkowa nierówność Friedrichsa.

Niech $u : [0, L] \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Mamy wtedy dla $t \in [0, L]$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds.$$

Załóżmy, że u spełnia (lewostronnie) warunek brzegowy Dirichleta $u(0) = 0$. Wtedy $u(t) = \int_0^t u'(s) ds$, i stąd

$$|u(t)|^2 \leq \int_0^t 1 ds \int_0^t |u'(s)|^2 ds = t \int_0^t |u'(s)|^2 ds \leq t \|u'\|_0^2,$$

gdzie $\|\cdot\|_0$ oznacza normę przestrzeni $L^2(0,L)$. Stąd ostatecznie

$$\|u\|_0^2 = \int_0^L |u(s)|^2 ds \leq \frac{L^2}{2}\|u'\|_0^2.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób **całkową nierówność Friedrichsa**:

Jeśli $u(0)=0$*, to*

$$(*) \qquad \|u\|_0^2 \leq \frac{L^2}{2}\|u'\|_0^2.$$

W przestrzeni $C^1([0,L])$ $|u|_1 = \|u'\|_0$ jest *seminormą*, ale w jej podprzestrzeni $C_0^1([0,L])$ funkcji spełniających jednorodny warunek brzegowy Dirichleta (wystarczy lewostronnie!), $|\cdot|_1$ jest *normą*.

Przestrzenie Sobolewa.

Niech (a,b) będzie przedziałem. Zerowa przestrzeń Sobolewa:

$$H^0(a,b) = L^2(a,b).$$

Aby zdefiniować przestrzeń $H^1(a,b)$ określimy najpierw przestrzeń $G^1([a,b])$ funkcji $u:[a,b]\to \mathbf{R}$ ciągłych i mających w $[a,b]$ pochodną całkowalną z kwadratem. W $G^1([a,b])$ określimy iloczyn skalarny

$$(u,v)_1 = (u,v)_0 + (u',v')_0$$

i związaną z nim normę

$$\|u\|_1 = (u,u)_1^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $(u,v)_0 = \int_a^b u(s)v(s)ds$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $L^2(a,b)$.

Przestrzeń Sobolewa $H^1(a,b)$, to uzupełnienie przestrzeni $G^1([a,b])$ w normie $\|\cdot\|_1$.

Przez $C^\infty(a,b)$ oznaczymy przestrzeń funkcji określonych na przedziale (a,b), które mają wszystkie pochodne ciągłe, zaś przez $C_0^\infty(a,b)\subset C^\infty(a,b)$ jej podprzestrzeń funkcji o nośniku zwartym, zawartym w (a,b).

Przestrzeń Sobolewa $H_0^1(a,b)$, to uzupełnienie przestrzeni $C_0^\infty(a,b)$ w normie $\|\cdot\|_1$[4]

Mamy następujące inkluzje:

$$H_0^1(a,b) \subset H^1(a,b) \subset H^0(a,b).$$

W przestrzeni $G^1([a,b])$, a więc także i w przestrzeni $H^1(a,b)$ $|u|_1 = \|u'\|_0$ jest *seminormą* (zastanów się dlaczego?). Natomiast w $H_0^1(a,b)$, $|u|_1$ jest **normą równoważną** normie $\|\cdot\|_1$. Wynika to z nierówności Friedrichsa:

Oczywiście $|u|_1^2 = \|u'\|_0^2 \leq \|u\|_0^2 + \|u'\|_0^2$. Z drugiej strony, z nierówności Friedrichsa:

$$|u|_1^2 \leq \|u\|_1^2 \leq (1 + \frac{L^2}{2})|u|_1^2.$$

Uogólnienia. Niech $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ będzie obszarem ograniczonym o brzegu *kawałkami gładkim.* Analogicznie jak wyżej określimy najpierw przestrzeń $G^1(\bar{\Omega})$ funkcji ciągłych $u : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$, które mają pierwsze pochodne cząstkowe całkowalne z kwadratem na $\bar{\Omega}$. W przestrzeni $G^1(\bar{\Omega})$ określimy iloczyn skalarny

$$(u,v)_1 = (u,v)_0 + \sum_{j=1}^{d}(\frac{\partial}{\partial x_j}u, \frac{\partial}{\partial x_j}v)_0$$

i zwiazaną z nim normę $\|\cdot\|_1$.

Uzupełnienie przestrzeni $G^1(\bar{\Omega})$ w normie $\|\cdot\|_1$, to przestrzeń Sobolewa $H^1(\Omega)$.

Podobnie, uzupełnienie w tej samej normie $\|\cdot\|_1$ przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$ funkcji o nośniku zwartym, zawartym w Ω, mających wszystkie pochodne cząstkowe ciągłe w obszarze Ω, to przestrzeń Sobolewa $H_0^1(\Omega)$.

Wyższe pochodne. Oznaczmy przez α *wielowskaznik*, to jest wektor $\alpha = [i_1, i_2, \cdots, i_d]$ o współrzędnych całkowitych. Niech $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} i_j$. Niech

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_d^{i_d}} u.$$

[4] Można uważać $H_0^1(a,b)$ za zbiór tych elementów przestrzeni $H^1(a,b)$, które spełniają jednorodny warunek Dirichleta.

Określimy $G^k(\bar{\Omega})$ jako przestrzeń funkcji $u : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$ które są klasy C^{k-1}, zaś ich k-te pochodne cząstkowe są całkowalne z kwadratem na $\bar{\Omega}$. Na $G^k(\bar{\Omega})$ zdefiniujemy iloczyn skalarny

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0,$$

oraz odpowiadającą mu normę $\| \cdot \|_k$.

Uzupełnienie $G^k(\bar{\Omega})$ w normie $\| \cdot \|_k$, to przestrzeń $H^k(\Omega)$. Podobnie, uzupełnienie w tej normie przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$, to $H_0^k(\Omega)$.

Mamy w ten sposób *dwie skale przestrzeni Sobolewa:*

$$\cdots H^k(\Omega) \subset H^{k-1}(\Omega) \subset \cdots \subset H^0(\Omega),$$

oraz

$$\cdots H_0^k(\Omega) \subset H_0^{k-1}(\Omega) \subset \cdots \subset H^0(\Omega)$$

przy czym dla każdego k

$$H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega).$$

Uwagi.

- *Elementy przestrzeni $H^1(a, b)$, to funkcje ciągłe.*

  Naszkicujemy tutaj dowód tego faktu. Jeśli $u \in G^1([a, b])$, to $\forall_{x,y} \in [a, b]$

  $$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(s) ds.$$

  Stąd (nierówność Schwarza)

  $$(*) \qquad |u(y) - u(x)| \leq \sqrt{(|y - x|)} \|u\|_1.$$

  Pamiętamy, że $G^1([a, b])$ jest zbiorem gęstym w $H^1(a, b)$. Weźmy więc dowolny ciąg Cauchy'ego w $G^1([a, b])$. Z nierówności (*) wynika, że elementy tego ciągu są jednakowo ciągłe w normie *sup*, a da się także udowodnić, że są one wspólnie ograniczone. Można zatem zastosować

Twierdzenie Ascoli-Arzela, z którego wynika, że z takiego ciągu wybierzemy podciąg jednostajnie zbieżny do funkcji ciągłej. Wyciągamy też wniosek, że wszystkie takie podciągi są zbieżne do tej samej granicy, którą identyfikujemy z elementem przestrzeni $H^1(a,b)$.

Takiego faktu nie da się udowodnić dla $H^1(\Omega)$, jeśli Ω jest obszarem w $\mathbf{R^d}$, gdzie $d > 1$.

- **Twierdzenie o śladzie.** *Niech $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ będzie obszarem ograniczonym, o brzegu $\partial\Omega$ kawałkami gładkim, bez ostrzy. Wtedy istnieje operator śladu*
$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$
taki, że

  1.
$$\exists_{C>0}\forall_{v\in H^1(\Omega)} \quad \|\gamma v\|_{0,\partial\Omega} \le C\|v\|_{1,\Omega},$$

  2.
$$\forall_{v\in G^1(\bar\Omega)} \quad \gamma v(p) = v(p), \quad p \in \partial\Omega.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy $d = 2$, oraz gdy Ω jest prostokątem o ścianach równoległych do osi układu współrzędnych. Taki obszar ma *brzeg kawałkami gładki*, to znaczy, że daje się rozbić na skończoną liczbę *kawałków*, które dadzą się sparametryzować w przy pomocy funkcji klasy C^1. Ten brzeg jest także *pozbawiony ostrzy*, co oznacza, że w żadnym punkcie dwa kawałki brzegu nie mają wspólnej stycznej. Łatwo uogólnić ten dowód na przypadek brzegu $\partial\Omega$ opisanego innymi krzywymi.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & * & . & . & . & . & . & . & . \\
 & * & . & . & . & . & . & . & . \\
a & * & * & * & * & . & . & . & . \\
 & * & . & . & * & . & . & . & . \\
p & * & \Omega_p & . & * & r & . & \Omega & . \\
 & * & . & . & * & . & . & . & . \\
b & * & * & * & * & . & . & . & . \\
 & * & . & . & . & . & . & . & . \\
 & * & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Niech $u \in G^1(\bar{\Omega})$, wtedy $\|u\|_1 < \infty$. Niech $p = (x_0, y)$ (punkt leżący na brzegu) i połóżmy

$$\phi(t) = u(x_0 + t, y).$$

Wtedy

$$\phi'(t) = u_x(x_0 + t, y),$$

oraz

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s) ds.$$

Stąd dla $r > 0$

$$r\phi(0) = \int_0^r \phi(t) dt - \int_0^r \int_0^t \phi'(s) ds dt.$$

Po zmianie kolejności całkowania w całce podwójnej dostaniemy

$$r\phi(0) = \int_0^r \phi(t) dt - \int_0^r (r - s)\phi'(s) ds.$$

Stosując nierówność $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$ i potem nierówność Schwarza, dostaniemy kolejno

$$r^2\phi(0)^2 \leq 2[\int_0^r 1\phi(t)dt]^2 + 2[\int_0^r \phi'(s)ds]^2 \leq$$

$$\leq 2r \int_0^r \phi(t)^2 dt + \frac{2}{3} r^3 \int_0^r \phi'(s)^2 ds,$$

oraz

$$u(x_0, y)^2 \leq \frac{2}{r} \int_0^r u(x_0 + t, y)^2 dt + \frac{2}{3} r \int_0^r u_x(x_0 + s, y)^2 ds.$$

Po scałkowaniu względem y w przedziale $[a, b]$ (patrz rysunek) dostaniemy

$$\int_a^b u(x_0, y)^2 dy \leq \frac{2}{r} \|u\|^2_{0,\Omega_p} + \frac{2}{3} r \|u_x\|^2_{0,\Omega_p}.$$

Zatem

$$\|\gamma u\|^2_{0,\Gamma_{a,b}} \leq C(\Omega_p) \|u\|^2_{1,\Omega_p}$$

i stąd otrzymujemy dla dowolnego elementu $u \in G^1(\bar{\Omega})$

$$\|\gamma u\|^2_{0,\partial\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|^2_{1,\Omega}.$$

Wykorzystując *gęstość* $G^1(\bar{\Omega})$ w $H^1(\Omega)$ i *zupełność* przestrzeni $L^2(\partial\Omega)$, wnioskujemy, że *operator śladu* γ jest określony na całej przestrzeni $H^1(\Omega)$ i, że odwzorowuje on przestrzeń $H^1(\Omega)$ w (część) przestrzeni $L^2(\partial\Omega)$ a więc $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$.$\blacksquare$

Różnicowa nierówność Friedrichsa. Ta nierówność jest odpowiednikiem całkowej nierówności Friedrichsa. Jest przydatna przy badaniu stabilności schematów różnicowych. Wyprowadzimy ją w przypadku jednowymiarowym.

Niech na przedziale $[0, L]$ dana będzie *siatka punktów* o stałym kroku $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \cdots, N+1$, $h = \frac{L}{N+1}$ oraz funkcja siatkowa

$$u_h = \{u_0, u_1, \cdots, u_{N+1}\}.$$

Mamy

$$u_k = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_k - u_{k-1}),$$

skąd

$$u_k = u_0 + h \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Delta u_j}{h},$$

a więc, jeśli $u_0 = 0$, to

$$u_k = h \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Delta u_j}{h}.$$

Stąd, po zastosowaniu nierówności Schwarza

$$|u_k| = \left| h \sum_{j=0}^{k-1} 1 \cdot \frac{\Delta u_j}{h} \right| \leq \sqrt{hk} \sqrt{h \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{\Delta u_j}{h})^2}.$$

Zatem

$$|u_k|^2 \leq kh \cdot h \sum_{j=0}^{N} (\frac{\Delta u_j}{h})^2,$$

oraz stąd

$$h \sum_{k=0}^{N+1} |u_k|^2 \leq h^2 \sum_{k=0}^{N+1} kh \sum_{j=0}^{N} (\frac{\Delta u_j}{h})^2 =$$

$$= h^2 \frac{N+1}{2} (N+2) h \sum_{j=0}^{N} (\frac{\Delta u_j}{h})^2.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób oszacowanie dla *dyskretnej normy* L^2

$$\|u_h\|_{0,h}^2 = h \sum_{k=0}^{N+1} |u_k|^2 \leq L^2 |u_h|_{1,h}^2,$$

gdzie $|u_h|^2_{1,h} = h\sum_{j=0}^{N}(\frac{\Delta u_j}{h})^2$. Jest to różnicowa forma nierówności Friedrichsa.

Uogólnienie. Niech $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ będzie obszarem siatkowym w $\mathbf{R^d}$. Oznaczmy jeszcze

$$\Omega^+_{h_i} = \{p \in \bar{\Omega}_h | p \in \bar{\Omega}_h \Rightarrow p + e_i h_i \in \bar{\Omega}_h\},$$

gdzie e_i jest wersorem $i-$tej osi układu współrzędnych, zaś h_i - krokiem siatki w kierunku tej osi.

Jeśli $u_h : \bar{\Omega}_h \to \mathbf{R}$, *oraz* $u_h(p) = 0$ *dla* $p \in \Gamma_h$, *to*

$$\|u_h\|^2_{0,h} \leq C(\Omega) h_i \sum_{p\in\Omega^+_{h_i}} (\frac{\Delta u_h(p)}{h})^2,$$

gdzie $C(\Omega)$ *jest stałą zależną tylko od obszaru* Ω.

Wykład 5.

Oszacowania a priori. Stabilność w normach typu $\mathbf{L^2}$.

Rozważmy następujący bardzo prosty przykład zagadnienia brzegowego

$$(1) \qquad -u''(t) + cu(t) = f(t) \quad t \in (a,b), \quad c \leq 0$$

$$(2) \qquad u(a) = u(b) = 0.$$

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie klasyczne u, pomnóżmy stronami równanie (1) przez u i scałkujmy w przedziale $[a,b]$. Całkując przez części otrzymamy

$$(3) \quad -u'(b)u(b) + u'(a)u(a) + \int_a^b (u'(t))^2 dt + c\int_a^b (u(t))^2 dt = \int_a^b f(t)u(t)dt,$$

zaś stąd, wykorzystując warunki brzegowe

$$|u|_1^2 + c\|u\|_0^2 = \int_a^b f(t)u(t)dt \leq K_1\|f\|_0\|u\|_0 \leq K_2\|f\|_0|u|_1 \leq K_3\|f\|_0\|u\|_1.$$

W ten sposób dostajemy tak zwane oszacowanie a priori rozwiązania u

$$|u|_1 \leq K_2\|f\|_0,$$

lub

$$\|u\|_0 \leq K_4\|f\|_0,$$

lub też

$$\|u\|_1 \leq K_5\|f\|_0.$$

Oszacowania te oznaczają, że rozwiązanie zależy w sposób ciągły od danych zadania. Mówimy, że zadanie (1)(2) jest dobrze postawione.

Przypuśćmy teraz, że zagadnienie (1)(2) zostało zaaproksymowane na siatce

$$t_0 = a, t_k = t_0 + kh, \quad k = 0,1,\cdots,N+1$$

przez schemat różnicowy

$$-\frac{\nabla\Delta u_k}{h^2} + cu_k = f_k, k = 1,2,\cdots,N,$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

Postępując w sposób analogiczny, jak w przypadku zagadnienia różniczkowego (1)(2), po uwzględnieniu wzoru na sumowanie przez części oraz nierówności Friedrichsa w wersji różnicowej, dostaniemy

$$h\sum_{j=0}^{N}(\frac{\Delta u_j}{h})^2 + ch\sum_{k=0}^{N+1} u_k^2 = \sum_{k=0}^{N+1} f_k u_k$$

zaś stąd otrzymamy oszacowania

$$\|u_h\|_h \leq C\|f_h\|_{0,h},$$

gdzie jako $\|\cdot\|_h$ można przyjąć każdą z norm $\|\cdot\|_{0,h}$ lub $\|\cdot\|_{1,h}$. Zauważmy od razu, że z tej ostatniej nierówności wynika istnienie jednoznacznego rozwiązania naszego schematu (mamy bowiem do czynienia z układem równań algebraicznych liniowych o macierzy kwadratowej!). Ten fakt, oraz otrzymane oszacowanie oznaczają *stabilność schematu* w każdej z wymienionych wyżej norm siatkowych.

Nierówności macierzowe. Normy energetyczne.

Niech A będzie macierzą kwadratową, rzeczywistą. Jeśli dla każdego wektora $x \neq 0$ mamy $(Ax, x) > 0$, to mówimy, że $A > 0$, lub że macierz jest określona dodatnio. Jeśli natomiast dla macierzy A i B zachodzi związek $A - B > 0$, to mówimy, że $A > B$. Zauważmy, że relacja $>$ dla macierzy jest jedynie porządkiem częściowym. Analogicznie, określamy nierówność nie ostrą dla macierzy w oparciu o pojęcie macierzy określonej nie ujemnie. Macierz A jest określona nie ujemnie, jeśli dla każdego wektora x, $(Ax, x) \geq 0$.

Normy Energetyczne.

Niech B będzie macierzą kwadratową wymiaru $N \times N$, rzeczywistą, symetryczną i dodatnio określoną. W naszej przestrzeni wektorowej mamy iloczyn skalarny $(u, v) = \sum_{j=1}^{N} u_j v_j$. Przy pomocy macierzy B możemy określić nowy iloczyn skalarny $(u, v)_B = (Bu, v)$, oraz związaną z nim normę $\|u\|_B = \sqrt{(u, u)_B}$. Jest to *norma energetyczna związana z macierzą B.*

Zapis macierzowy schematów różnicowych.

Niekiedy jest wygodnie zapisać schemat różnicowy (liniowy) w postaci układu równań algebraicznych liniowych

$$A_h u_h = g_h.$$

De facto jest to *rodzina układów*, gdzie $h \in \omega \subset \mathbf{R}$, gdzie ω jest rozważanym zbiorem indeksów h; jedynym jego punktem skupienia jest 0. Znajomość własności macierzy A_h może być pomocna przy badaniu stabilności rozważanego schematu. Istotnie:
Jeśli rodzina macierzy A_h, $h \in \omega$ jest wspólnie jednostajnie dodatnio określona, to znaczy, jeśli

$$\exists_{\gamma>0}, \quad \textit{że} \ \ \forall_{h\in\omega} \ \ i \ \ \forall_{u_h\neq 0}, \quad (A_h u_h, u_h)_h \geq \gamma \|u_h\|_h^2,$$

to schemat jest stabilny w normie $\|\cdot\|_h$

Dowód. Mamy:

$$(g_h, u_h)_h = (A_h u_h, u_h)_h \geq \gamma \|u_h\|_h^2,$$

i stąd

$$\|u_h\|_h \leq \frac{1}{\gamma} \|g_h\|_h.$$

■

Uwaga. Jeśli stała γ jest bardzo mała, to stała w warunku stabilności $\frac{1}{\gamma}$ będzie bardzo duża. Oznacza to, że rozwiązanie u_h może być bardzo wrażliwe ze względu na zaburzenia g_h. Wtedy może być wygodnie zastosować inną normę:

$$\|g_h\|_h^2 = (A_h u_h, A_h u_h)_h = (A_h u_h, S_h S_h u_h)_h,$$

gdzie $A_h = S_h^2$ (taka macierz S_h zawsze istnieje i jest symetryczna i dodatnio określona, oraz *komutuje* z macierzą A_h). Mamy więc

$$\|g_h\|_h^2 = (S_h A_h u_h, S_h u_h)_h = (A_h S_h u_h, S_h u_h)_h \geq \gamma \|u_h\|_{A_h}^2,$$

zaś stąd ostatecznie

$$\|u_h\|_{A_h} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|g_h\|_h.$$

W ten sposób zmniejszyliśmy stałą stabilności. ■

Można podobny efekt uzyskać także inaczej. Niech $B_h = B_h^T > 0$, i przypuśćmy, że

$$\exists_{\alpha \geq 0} \ \text{ nie zależne od } h, \text{ takie, że } \ (A_h u_h, u_h)_h \geq \alpha (B_h u_h, u_h)_h.$$

Wtedy mamy:

$$\alpha \|u_h\|_{B_h}^2 = \alpha (B_h u_h, u_h)_h \leq (A_h u_h, u_h)_h =$$
$$= (g_h, u_h)_h = (B_h B_h^{-1} g_h, u_h)_h = (B_h^{-1} g_h, B_h u_h)_h \leq$$
$$\leq \sqrt{(B_h^{-1} g_h, g_h)_h} \sqrt{(B_h^{-1} B_h u_h, B_h u_h)_h} =$$
$$= \|g_h\|_{B_h^{-1}} \|u_h\|_{B_h},$$

i stąd

$$\|u_h\|_{B_h} \leq \frac{1}{\alpha} \|g_h\|_{B_h^{-1}}.$$

■

Wykład 6

Przykład (agitacja) Rozważamy dobrze nam znane zagadnienie brzegowe

$$-u^{''}(t) + cu(t) = f(t), \quad t \in (o, 1) \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

Niech $V = C^1([0,1])$ i niech $V_0 = \{v \in V | \ \ v(0) = v(1) = 0\}$. Pomnożymy stronami równanie (1) przez $v \in V_0$ i scałkujemy w przedziale $(0, 1)$ wykorzystując wzór na całkowanie przez części oraz uwzględniając fakt, że *wyraz brzegowy* znika; otrzymamy

$$\int_0^1 (u'(t)v'(t) + cu(t)v(t))dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

Oznaczmy:

$$a(u, v) = \int_0^1 (v'(t)u'(t) + cu(t)v(t))dt,$$

$$lv = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

Zauważmy, że

$$a : V \times V \to \mathbf{R} \ \text{ jest formą dwuliniową nad } V$$

$$l : V \to \mathbf{R} \ \text{ jest formą liniową nad } V.$$

Zatem, zagadnienie (1)(2) zastąpiliśmy innym zagadnieniem

$$\text{znajdź } \ u \in V_0, \ \ \text{takie, że } \ \forall_{v \in V_0} \ \ a(u, v) = lv. \tag{3}$$

Jest to *równanie wariacyjne*. Zagadnienie (3) jest *sformułowaniem uogólnionym* zagadnienia (1),(2). Rzeczywiście, możemy uważać (3) za uogólnienie (1),(2), gdyż rozwiązanie *klasyczne u* zagadnienia (1)(2), jeśli istnieje, to spełnia równanie wariacyjne (3), zaś nie każde rozwiązanie równania wariacyjnego (3) musi spełniać (1)(2). Zauważmy, że rozwiązania równania wariacyjnego (3) nie muszą być dwukrotnie różniczkowalne: mogą być tylko jeden raz różniczkowalne!

Weźmy teraz pod uwagę inne zagadnienie brzegowe

$$-u^{''}(t) + cu(t) = f(t), \quad t \in (0,1), \tag{4}$$

$$u^{'}(0) = a, \quad u^{'}(1) = b. \tag{5}$$

Warunki brzegowe (5) możemy interpretować tak: *zadana jest pochodna normalna zewnętrzna do brzegu obszaru* $\Omega = (0,1)$, a więc jest to *warunek brzegowy Neumanna.*

Postąpimy teraz w podobny sposób jak poprzednio. Pomnożymy stronami równanie (4), tym razem jednak przez dowolny element przestrzeni $V = C^1([0,1])$. Po scałkowaniu przez części w przedziale $(0,1)$, otrzymamy

$$\int_0^1 (u^{'}(t)v^{'}(t) + cu(t)v(t))dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt - av(0) + bv(1).$$

Możemy teraz napisać *równanie wariacyjne*

$$a(u,v) = lv + gv, \tag{6}$$

gdzie

$$a : V \times V \to \mathbf{R},$$
$$l,\ g : V \to \mathbf{R},$$
$$a(u,v) = \int_0^1 (u^{'}(t)v^{'}(t) + cu(t)v(t))dt,$$
$$lv = \int_0^1 f(t)v(t)dt,$$
$$gv = bv(1) - av(0).$$

Równania wariacyjne (3) i (6) mają następującą własność: *jeśli prawa strona równania różniczkowego* f *jest ciągła w* $(0,1)$ *i jeśli* $u \in \mathbf{C^2}$ *jest rozwiązaniem, to* u *spełnia odpowiednio* (1)(2), *lub* (4)(5).

Sprawdźmy to na przykład dla (6). Niech najpierw $v \in V_0$. Ponieważ $u \in \mathbf{C^2}$ to w (6) możemy ponownie scałkować przez części i otrzymamy

$$\int_0^1 (-u^{''}(t) + cu(t) - f(t))v(t)dt = 0, \quad \forall_{v \in V_0}.$$

Ze względu na to, że $v(0) = v(1) = 0$, mamy $g(v) = 0$. Ponieważ

$$-u^{''}(t) + cu(t) - f(t), \quad t \in (0,1)$$

jest funkcją ciągłą, to warunek znikania całki dla wszystkich $v \in V_0$ pociąga

$$-u''(t) + cu(t) = f(t), \quad t \in (0,1), \tag{7}$$

a więc spełnione jest równanie różniczkowe (4). Wybierzmy teraz $v \in V$; mnożąc stronami równanie (4) przez $v \in V$ i całkując przez części otrzymamy

$$a(u,v) = lv + u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Po odjęciu stronami równania (6), otrzymamy

$$(u'(1) - b)v(1) - (u'(0) - a)v(0) = 0.$$

Możemy teraz dobrać $v \in V$ tak, aby najpierw $v(0) = 1, \quad v(1) = 0$, oraz następnie tak, aby $v(0) = 0, \quad v(1) = 1$; otrzymamy

$$u'(0) = a, \quad u'(1) = b.$$

Widzimy więc, że spełniony jest również warunek Neumanna. ■

Własności form a i l

Stosując nierówność Schwarza wyprowadzimy łatwo następujące nierówności

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_1\|v\|_1,$$

oraz

$$|lv| \leq L\|v\|_0 \leq L\|v\|_1,$$

gdzie M i L są stałymi. Nierówności te oznaczają **ciągłość (ograniczoność)** rozważanych form.

Nie trudno też oszacować wyrażenie $a(u,u)$ z dołu:

$$a(u,u) = \int_0^1 (u'(t)^2 + cu(t)^2)dt \geq \min\{1,c\} \int_0^1 (u'(t)^2) + u(t)^2)dt \geq \gamma\|u\|_1^2,$$

gdzie $\gamma = \min\{1,c\}$ w tym przypadku. Ta ostatnia nierówność oznacza **koercywność** formy a w przestrzeni V.

Sformułowania (3) i (6) są uogólnione w tym sensie, że od rozwiązania nie wymagają jego dwukrotnej różniczkowalności. Formalnie wystarczy przynależność do $V = \mathbf{C^1([0,1])}$. Jednak nie potrafimy udowodnić istnienia i jednoznaczności rozwiązania tak postawionego zadania. Potrzebne jest tu jeszcze większe rozszerzenie przestrzeni V_0, lub V w ten sposób, aby uzyskać ich zupełność w sensie naturalnej dla tych przestrzeni normy $\|\cdot\|_1$. Taką przestrzenią jest $H_0^1(0,1)$ dla zadania (3), zaś $H^1(0,1)$ dla zadania (6). Ze względu na gęstość V_0 lub odpowiednio V w przestrzeni $H_0^1(0,1)$, względnie $H^1(0,1)$, oraz ze względu na ograniczoność rozpatrywanych form a i l, formy te można przedłużyć w sposób zachowujący ciągłość i koercywność na przestrzenie $H_0^1(0,1)$ i $H^1(0,1)$.

Doszliśmy w ten sposób do **pełnego sformułowania uogólnionego.**

Niech $(V,(\cdot,\cdot))$ **będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta.**

Dana jest forma dwuliniowa

$$a : V \times V \to \mathbf{R},$$

- **ciągła:** $\exists_{M>0}$**, taka, że** $\forall_{u,v\in V} \quad |a(u,v)| \le M\|u\|\|v\|$,
- **i koercywna:** $\exists_{\gamma>0}$ **taka, że** $\forall_{u\in V} \quad \gamma\|u\|^2 \le a(u,u)$

oraz forma liniowa

$$l : V \to \mathbf{R}$$

ciągła: $\exists_{L\ge 0} \quad \forall_{v\in V} \quad |lv| \le L\|v\|$.

$(*)$ **Poszukujemy** $u \in V$ **takiego, że** $a(u,v) = lv, \quad \forall_{v\in V}.$

Dla rozpatrywanych uprzednio przykładów należy przyjąć $H_0^1(0,1)$ dla zadania (3), zaś $H^1(0,1)$ dla zadania (6).

Zajmiemy się teraz sprawą istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia $(*)$.

Twierdzenie Laxa - Milgrama. *Niech* $(V,(\cdot,\cdot))$ *będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta,*

$$a : V \times V \to \mathbf{R},$$

formą dwuliniową **ograniczoną i koercywną,**

$$l : V \to \mathbf{R}$$

formą liniową **ograniczoną**.

Wtedy równanie wariacyjne $(*)$ *ma jednoznaczne rozwiązanie* $u \in V$.

Dowód. Ustalmy chwilowo $u \in V$;

$$v \mapsto a(u, v)$$

dla każdego $u \in V$ ustalonego jest funkcjonałem liniowym nad V. Zatem mamy operator

$$A : V \to V',$$

$$Au = a(u, \cdot),$$

gdzie V' oznacza **przestrzeń dualną do przestrzeni** V, to jest przestrzeń wszystkich funkcjonałów liniowych i ograniczonych nad przestrzenią V.

Dla przestrzeni Hilberta V zachodzi **Twierdzenie Riesza***:*

Istnieje izomorfizm liniowy (izometria)

$$\tau : V' \to_{na} V,$$

taki, że dla każdego $f \in V'$, $\tau f = v_f \in V$ *i* $\|f\| = \|v_f\|$, *oraz dla każdego* $v \in V$

$$fv = (v_f, v).$$

Mamy więc $a(u, v) = (\tau(Au), v)$, a więc $a(u, v) = lv$ można zapisać równoważnie

$$(\tau(Au), v) = (\tau(l), v).$$

Zatem nasze zadanie $(*)$ jest równoważne równaniu operatorowemu

$$(**) \qquad Au = l.$$

Zauważmy, że operator A jest **liniowy** i **ograniczony**. Liniowość wynika bezpośrednio z liniowości a.

Udowodnimy ograniczoność A. Mamy

$$\|Au\| =$$

$$= \sup_{\|w\|=1} |Auw| = \sup_{\|w\|=1} (\tau(Au), w) = \sup_{\|w\|=1} |a(u, w)| \leq M\|u\|\|w\| = M\|u\|,$$

gdzie M jest stałą ciągłości formy a. To oznacza, że norma A jest ograniczona z góry przez M. Teraz pokażemy, że równanie $Au = l$ ma jednoznaczne rozwiązanie. Zastosujemy, twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Niech
$$\Phi(v) = v + \rho\tau(l - Av),$$
gdzie $\rho > 0$; mamy
$$\Phi : V \to V.$$
Udowodnimy, że można tak dobrać ρ, że Φ będzie odwzorowaniem zwężającym. Stad wyniknie, istnienie jedynego $u \in V$, takiego, że $u = \Phi(u)$, a więc $Au = l$.

Niech $v_1, v_2 \in V$.
$$\Phi(v_1) - \Phi(v_2) = v_1 - v_2 - \rho\tau(A(v_1 - v_2)).$$
Stąd:
$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|^2 = \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2\|\tau(A(v_1 - v_2))\|^2 - 2a(v_1 - v_2, v_1 - v_2).$$
Teraz skorzystamy z ograniczoności i koercywności formy a.
$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|^2 \leq$$
$$\leq \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 M^2\|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho\gamma\|v_1 - v_2\|^2 = [M^2 - 2\rho\gamma + 1]\|v_1 - v_2\|^2.$$
A więc
$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\| \leq L\|v_1 - v_2\|$$
gdzie $L^2 = M^2\rho^2 - 2\rho\gamma + 1$. Widzimy, że jeśli $0 < \rho < \frac{2\gamma}{M^2}$, to $0 \leq L < 1$. ■

Wykład 7.

Metoda Ritza - Galerkina. (Sformułowanie abstrakcyjne.) Niech V, $(\cdot,\cdot)$ będzie przestrzenią Hilberta. Niech $\{V_h\}_{h\in\omega}$, $V_h \subset V$ będzie rodziną podprzestrzeni skończonego wymiaru przestrzeni V. Będziemy chcieli, aby dla tej rodziny było spełnione następujące

Założenie. (Własność aproksymacji) Rodzina podprzestrzeni $\{V_h\}_{h\in\omega}$ przestrzeni V, ma *własność aproksymacji* jeśli

$$\forall_{u\in V}\ \forall_{h\in\omega}\ \exists v_h(u) \in V_h,\ \text{ że } \|v_h(u) - u\| \to 0,\ \text{ gdy } h \to 0.$$

Równanie przybliżone. Nasze sformułowanie wariacyjne

(1) Poszukujemy $u \in V$ takiego, że $a(u,v) = lv \quad \forall_{v\in V}$,

"obetniemy" do przestrzeni V_h; to znaczy zamienimy (1) przez

(2) Poszukujemy $u_h \in V_h$ takiego, że $a(u_h, v_h) = lv_h \quad \forall_{v_h\in V_h}$.

Jest to *równanie przybliżone* - **Metoda "Ritza - Galerkina".**

Ponieważ przestrzenie V_h są skończonego wymiaru, to są one przestrzeniami Hilberta (są zupełne!). Ponadto formy a i l zachowują swoje własności **ograniczoności i koercywności** w przestrzeniach V_h, ze stałymi M i γ niezależnymi od h. Zatem dla zagadnienia (2) funkcjonuje Twierdzenie Laxa-Milgrama, skąd wynika, że (2) ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

Co to jest naprawdę zagadnienie (2)?

Niech

$$V_h = \operatorname{span}\{\phi_1^h, \phi_2^h, \cdots, \phi_{N_h}^h\},$$

gdzie elementy ϕ_j^h, $j = 1, 2, \cdots, N_h$ są liniowo niezależne. Stąd wynika, że $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \phi_j^h c_j$, i ze względu na liniowość form a i l, równanie (2) możemy zapisać równoważnie:

(3) $$\sum_{j=1}^{N_h} a(\phi_j^h, \phi_k^h) c_j = l\phi_k^h, \quad k = 1, 2, \cdots, N_h,$$

lub, używając zapisu macierzowego

$$A_h \underline{c} = \underline{l}, \tag{4}$$

gdzie

$$A_h = (a_{k,j})_{k,j=1,2,\cdots,N_h}, \quad a_{k,j} = a(\phi_j^h, \phi_k^h)$$

jest macierzą wymiaru $N_h \times N_h$,

$$\underline{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_{N_h}]^T,$$

jest wektorem, którego poszukujemy, zaś

$$\underline{l} = [l\phi_1^h, l\phi_2^h, \cdots, l\phi_{N_h}^h]^T.$$

Inaczej mówiąc, Metoda Ritza-Galerkina polega ostatecznie na rozwiązaniu układu równań algebraicznych liniowych (4).

Zbieżność. Interesuje nas, czy

$$\|u_h - u\| \to 0, \quad \text{gdy} \quad h \to 0,$$

gdzie u jest rozwiązaniem (1), zaś u_h jest rozwiązaniem (2), i jak szybko $\|u - u_h\|$ dąży do zera. Będziemy zakładać, że formy a i l są ograniczone, zaś forma a jest również koercywna.

Lemat 1. *Metoda Ritza-Galerkina jest stabilna.*

Dowód. Rozwiązanie u_h równania (2) istnieje i jest jedyne; wykorzystując koercywność i ograniczoność form otrzymamy

$$\gamma\|u_h\|^2 \leq a(u_h, u_h) = |lu_h| \leq \|l\|\|u_h\|,$$

zaś stąd wynika

$$\|u_h\| \leq \frac{\|l\|}{\gamma}.$$

Ta nierówność oznacza stabilność. ■

Lemat 2. *Jeśli $u \in V$ jest rozwiązaniem równania* (1)*, zaś $u_h \in V_h$ jest rozwiązaniem równania* (2)*, to*

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall_{v_h \in V_h}. \tag{5}$$

Komentarz. Gdyby forma a była symetryczna, (to znaczy, gdyby $\forall_{u,v\in V}\ a(u,v) = a(v,u)$), to wzór (5) oznaczałby, że u_h jest rzutem ortogonalnym w sensie iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_a$, gdzie $(u,v)_a = a(u,v)$, elementu u na podprzestrzeń V_h dla tego iloczynu skalarnego. Zatem, dla normy generowanej przez ten iloczyn skalarny u_h byłby najlepszą aproksymacją w przestrzeni V_h elementu $u \in V$.

Dowód. Mamy:

$$a(u, v_h) = lv_h,$$

$$u(u_h, v_h) = lv_h,$$

$\forall v_h \in V_h$, więc odejmując stronami powyższe równości otrzymamy tezę. ■

Twierdzenie Céa. *Dla rozwiązań $u \in V$ i $u_h \in V_h$ równań* (1) *i* (2) *zachodzi oszacowanie*

$$\|u - u_h\| \le \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|,$$

gdzie M i γ są stałymi ciągłości i koercywności formy a.

Dowód. Wykorzystując koercywność formy a i Lemat 2 otrzymamy

$$\gamma\|u - u_h\|^2 \le a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) - a(u - u_h, u_h) =$$

$$= a(u - u_h, u) - a(u - u_h, v_h)$$

gdzie $v_h \in V_h$ jest dowolnym elementem. Stąd

$$\|u - u_h\| \le \frac{M}{\gamma}\|u - v_h\|.$$

Biorąc po obu stronach ostatniej równości $\inf_{v_h \in V_h}$ otrzymamy tezę:

$$\|u - u_h\| \le \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \blacksquare$$

Wniosek. *Jeśli podprzestrzenie V_h mają* **własność aproksymacji**, *to metoda Ritza-Galerkina jest zbieżna.*

Dowód. Istotnie, dla $u \in V$ $\exists v_h(u) \in V_h$ takie, że $\|u - v_h(u)\| \to 0$. Zatem

$$\|u - u_h\| \le \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \le \|u - v_h(u)\| \to 0. \ \blacksquare$$

Twierdzenie Céa wskazuje na to, ze jakość konkretnej wersji Metody Ritza-Galerkina zależy od tego jak zostaną wybrane przestrzenie skończonego wymiaru V_h. Mówiąc o jakości danej wersji metody mamy na myśli przede wszystkim

- szybkość zbieżności u_h do u gdy $h \to 0$,
- postać macierzy A_h układu równań (4); macierz ta jest na ogół bardzo dużego wymiaru. Zatem bardzo istotną pozytywną jej cechą byłaby jej *pasmowość*.

Metoda Elementu Skończonego (MES) - Finite Element Method (FEM) jest taką realizacją Metody Ritza-Galerkina która

- pozwala uzyskiwać oszacowania szybkości zbieżności,
- produkuje macierze A_h układu (4) o budowie pasmowej.

Wykład 8.

Metoda Elementu Skończonego. Konforemna Metoda Elementu Skończonego jest szczególnym przypadkiem Metody Ritza-Galerkina; Metodę Elementu Skończonego otrzymujemy dobierając w specjalny sposób podprzestrzenie skończonego wymiaru V_h. Metoda Elementu Skończonego jest **konforemna**, jeśli dla każdego $h \in \omega$, $V_h \subset V$.[5] Przestrzenią V, w tym przypadku, jest najczęściej jedna z przestrzeni Sobolewa $H^m(\Omega)$, lub $H_0^m(\Omega)$.

Metodę Elementu Skończonego opiszemy dla nieco uproszczonego przypadku, gdy obszar $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ jest **wielościanem** $d-$wymiarowym ograniczonym, to jest skończoną sumą mnogościową simpleksów.

Rozważmy *rodzinę triangulacji zbioru* $\bar{\Omega}$,

$$\tau_h = \{T_1, T_2, \cdots, T_M\}.$$

Liczba M i zbiory T_j zależą od parametru $h \in \omega$, co nie zostało uwzględnione w oznaczeniach, aby ich nie komplikować. Rodzina τ_h nie musi składać się z simpleksów. Rozważa się również rozkłady zbioru $\bar{\Omega}$ na innego rodzaju podzbiory. Dla ustalenia uwagi tutaj będziemy mówić o *triangulacjach*, pamiętając jakie warunki powinien spełniać taki rozkład.

Rodzina τ_h jest *regularna* jeśli istnieją dwie stałe dodatnie κ i β, niezależne od h i takie, że

- $\beta h \leq h_T \leq h$, gdzie h_T, to średnica simpleksu $T \in \tau_h$, zaś $h = \max_{T\in\tau_h}\{h_T\}$.
- $\frac{\rho_T}{h_T} \geq \kappa$, gdzie ρ_T jest promieniem kuli wpisanej w T.

Element. *Element*, to trójka

$$\{T, \mathcal{P}_T, \Sigma_T\},$$

gdzie

- $T \in \tau_h$,

[5]Rozważa się również wersję **niekonforemną MES**. Wtedy warunek $V_h \subset V \quad \forall_{h\in\omega}$ nie jest spełniony. Do MES niekonforemnej nie stosuje się przedstawiona wyżej teoria zbieżności oparta na twierdzeniu Céa.

- $\mathcal{P}_T$ to przestrzeń liniowa skończonego wymiaru, funkcji określonych na zbiorze T; zwykle wymaga się żeby przestrzeń $\mathcal{P}_T$ zawierała wszystkie wielomiany stopnia $\leq s$, dla pewnego s-naturalnego.
- Σ_T to tak zwany *zbiór stopni swobody elementu.* Zbiór Σ_T jest skończonym układem liniowo niezależnych funkcjonałów nad przestrzenią $\mathcal{P}_T$:
$$\Sigma_T = \{\phi_1^h, \phi_2^h, \cdots, \phi_{N_h}^h\}.$$
Funkcjonały $\phi_1^h, \cdots, \phi_{N_h}^h$ mają następującą *własność interpolacji*: dla dowolnego układu liczb $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{N_h}$, równania
$$\phi_j^h(P) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \cdots, N_h$$
wyznaczają jednoznacznie element $P \in \mathcal{P}_T$.

Baza dualna. Bazę dualną budujemy wyznaczając elementy $P_1, P_2, \cdots, P_{N_h}$ z przestrzeni $\mathcal{P}_T$ przy pomocy układu równań
$$\phi_j^h(P_k) = \delta_{k,j} \quad k, j = 1, 2, \cdots, N_h.$$
Ze względu na warunki, które spełniają *stopnie swobody*, baza dualna zawsze istnieje, i jest jedyna.

Zauważmy, że mając bazę dualną możemy bardzo łatwo wyznaczyć tak zwany "interpolant", to jest taki element $P \in \mathcal{P}_T$, który dla dowolnego układu liczb $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{N_h}$ spełnia warunki "interpolacji":
$$\phi_j^h(P) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \cdots, N_h.$$
Widzimy, że
$$P = \sum_{j=1}^{N_h} P_j \alpha_j.$$
W przypadku, gdy funkcjonały ϕ_j^h "wybijają" wartość funkcji w zadanych punktach jest to prawdziwa interpolacja. Niech bowiem $x_1^h, x_2^h, \cdots, x_{N_h}^h$ będą różnymi punktami T. Niech
$$\phi_j^h(P) = P(x_j^h), \quad j = 1, 2, \cdots, N_h.$$

Jeśli $\{P_1, P_2, \cdots, P_{N_h}\}$ jest bazą dualną, to

$$\phi_k^h(P) = P(x_k^h) = \sum_{j=1}^{N_h} \phi_k^h(P_j)\alpha_j = \alpha_k.$$

Przestrzenie MES. Przestrzenie V_h tworzymy "sklejając" w odpowiedni sposób funkcje z przestrzeni $\mathcal{P}_T$. Otrzymujemy funkcje $v_h : \Omega \to \mathbf{R}$, $v_h \in V_h$ takie, że dla każdego $T \in \tau_h$

$$v_{h|T} \in \mathcal{P}_T.$$

Jeśli chcemy uzyskać *konforemną MES*, to sklejanie poszczególnych części v_h powinno być takie, żeby $v_h \in V$. Używając tych przestrzeni V_h, które w tym przypadku nazywa się *Przestrzeniami Elementu Skończonego*, wygodnie jest posługiwać się ich bazami. Przy tworzeniu tych baz często wykorzystujemy bazy dualne na poszczególnych elementach.

W naszych rozważaniach najczęściej wykorzystywaliśmy przestrzenie Sobolewa $H^1(\Omega)$ lub $H_0^1(\Omega)$ jako przestrzeń V. Ogólnie, przestrzenie Sobolewa $H^m(\Omega)$ najczęściej w takiej roli występują. Toteż ich własności będą dla nas najistotniejsze.

Interpolant. Prawdziwe jest następujące twierdzenie, które podajemy tu bez dowodu

Twierdzenie. *(Bramble-Hilbert) Niech $\Omega \subset \mathbf{R^2}$ i $u \in H^s(\Omega)$, gdzie $s \geq 2$. Niech τ_h będzie regularną rodziną triangulacji obszaru Ω. Wtedy w każdym trójkącie $T \in \tau_h$ można znaleźć takie punkty*

$$p_1, p_2, \cdots, p_l$$

i jedyny taki wielomian $P_{T,s-1}$ stopnia nie większego od $s-1$, że

$$P_{T,s-1}(p_j) = u(p_j) \quad j = 1, 2, \cdots, l$$

(Jest to wielomian interpolacyjny Lagrange'a). Wielomiany $P_{T,\ s-1}$ dla poszczególnych $T \in \tau_h$ można tak "skleić", że powstanie "splajn" zwany także "interpolantem" $I_h(u)$. Mamy wtedy:

- *$I_h(u) \in H^{m_0}(\Omega)$ dla pewnego $m_0 \leq s$*

- $\forall\, T \in \tau_h \quad I_h(u)_{|T} = P_{T,s-1} \in \mathcal{P}_T$,
- *jeśli* $m \le m_0$, *to dla interpolantu zachodzi oszacowanie*

  $$(*) \qquad \|u - I_h(u)\|_{\Omega,m} \le Ch^{s-m}|u|_{\Omega,s},$$

  gdzie stała C *nie zależy od* h, *zaś* $|\cdot|_{\Omega,s}$ *jest* s*-tą seminormą z przestrzeni Sobolewa* $H^s(\Omega)$. ■

Nierówność $(*)$ z Twierdzenia Brambla-Hilberta wskazuje na to, czego można oczekiwać po metodach typu MES. Jeśli bowiem, na przykład $V = H^m(\Omega)$, $u \in H^s(\Omega)$, $m < s$, gdzie u jest rozwiązaniem zadania różniczkowego, $u_h \in V_h$ jest rozwiązaniem zadania przybliżonego przez MES oraz $I_h(u) \in V_h \subset H^m(\Omega)$, to z Twierdzenia Céa wynika

$$\|u - u_h\|_{\Omega,m} \le \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\Omega,m} \le \frac{M}{\gamma}\|u - I_h(u)\|_{\Omega,m} \le Ch^{s-m}|u|_{\Omega,s}.$$

Mamy stąd oszacowanie szybkości zbieżności metody, w zależności od tego, w jakiej normie $\|\cdot\|_{\Omega,m}$ chcemy to oszacowanie otrzymać, oraz od **regularności rozwiązania** u.

Dla przestrzeni MES, której elementami są "splajny" to jest funkcje kawałkami wielomianowe, możemy naogół konstruować bazy, których elementami są funkcje o **małych nośnikach**. Niech

$$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_{N_h}$$

będzie taką właśnie bazą przestrzeni V_h. Gdy forma dwuliniowa

$$a : V \times V \to \mathbf{R}$$

jest formą całkową, to elementy $a_{i,j} = a(\Phi_j, \Phi_i)$ macierzy A_h układu równań algebraicznych liniowych $A_h\bar{c} = \bar{l}$, otrzymanego w konsekwencji stosowania MES, będą znikały dla i i j różniących się dostatecznie dużo. Oznacza to, że **macierz A_h ma budowę pasmową**.

Przykłady - patrz **Zadania z ćwiczeń.**

Wykład 9.

Pytanie. Niech

- $V = H^1(\Omega)$,
- rodzina triangulacji $\tau_h = \{T_1, T_2, \cdots, T_M\}$,
- ELEMENT= $\{T,\ \mathcal{P}_T,\ \Sigma_T\}$, gdzie $\mathcal{P}_T$ składa się z wielomianów stopnia $\leq s$,
- V_h-przestrzeń elementu skończonego, $v_h \in V_h \Rightarrow v_{h|T} \in \mathcal{P}_T$.

Kiedy przestrzenie V_h są konforemne?

Aby móc odpowiedzieć na to pytanie, trzeba jeszcze coś powiedzieć o przestrzeniach Sobolewa. Będzie to twierdzenie o tych przestrzeniach, które tu podamy bez dowodu.

Twierdzenie. *Przestrzeń $H^m(\Omega)$ jest identyczna ze zbiorem wszystkich takich elementów $v \in L^2(\Omega)$, że $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$ dla $\alpha = [i_1, i_2, \cdots, i_d]^T$ i $|\alpha| \leq m$, gdzie*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_d^{i_d}}$$

jest **pochodną dystrybucyjną (słabą).**

O dystrybucjach.[6]

Znamy już zbiór $C_0^\infty(\Omega)$wszystkich funkcji mających wszystkie pochodne ciągłe i nośniki zwarte, zawarte w zbiorze otwartym Ω. W $C_0^\infty(\Omega)$ wprowadza się topologię przestrzeni liniowej lokalnie wypukłej. Opiszemy krótko jaka to topologia.

- Dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$, dla wszystkich funkcji z $C_0^\infty(\Omega)$ o nośniku w K tworzymy ciąg seminorm

  $$p_{K,j}(\phi) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq j} |D^\alpha \phi(x)|, \quad j = 0, 1, 2, \cdots.$$

  W ten sposób dla każdego takiego zbioru K mamy przestrzeń funkcyjną liniową, lokalnie wypukłą.

[6] Więcej szczegółów na ten temat - patrz np. Kôsaku Yosida "Functional Analysis", Springer-Verlag 1966, pp 27-30.

- Można pokazać, że topologia przestrzeni związanej ze zbiorem zwartym K_1 jest indukowana przez topologię takiej przestrzeni związanej ze zbiorem zwartym K_2, jeśli $K_1 \subset K_2 \subset \Omega$. W ten sposób w $C_0^\infty(\Omega)$ tworzy się tak zwaną topologię *granicy prostej*. Zbiór otwarty dla w takiej topologii, to taki zbiór, którego przecięcie z każdą podprzestrzenią związaną z dowolnym zbiorem zwartym $K \subset \Omega$ jest otwarty. Taka topologia "widzi" fakt, że elementy $C_0^\infty(\Omega)$ mają wszystkie pochodne ciągłe.

Dystrybucja na Ω, to funkcjonał liniowy i ciągły T nad przestrzenią $C_0^\infty(\Omega)$,

$$T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R}.$$

Przykład 1. Niech $f \in L^2(\Omega)$ i $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$; niech

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)d\Omega.$$

Jest to dystrybucja przyporządkowana elementowi $f \in L^2(\Omega)$.

Przykład 2. Niech $f \in C^n([a,b]), \quad n \geq 1$ i $\phi \in C_0^\infty((a,b))$; niech

$$T_f(\phi) = \int_a^b f(x)\phi(x)dx.$$

Mamy $f'(x)\phi(x) + f(x)\phi'(x) = [f(x)\phi(x)]'$ i stąd

$$T_{f'}(\phi) = \int_a^b f'(x)\phi(x)dx = -T_f(\phi'),$$

gdyż funkcje ϕ mają nośniki zwarte w przedziale otwartym (a,b).

Komentarz. Dystrybucja T_f odpowiada funkcji f. Zamiast myśleć o funkcjach możemy myśleć o dystrybucjach im przyporządkowanych. W tym sensie możemy uważać dystrybucje za "uogólnione funkcje". $T_{f'}$ - to dystrybycja przyporządkowana pochodnej f'; powyższy wzór sugeruje następującą ogólną definicję:

Definicja pochodnej dystrybucji. *Pochodna* D^α *dystrybucji*

$$T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R},$$

gdzie $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ *i* $\alpha = [i_1, i_2, \cdots, i_d]$*, to dystrybucja*

$$D^\alpha T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R},$$

taka, że

$$D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha(\phi))$$

dla każdego $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*.*

Komentarz. Jeśli będziemy traktować "zwykłe" funkcje jako dystrybucje, możemy mówić o **pochodnych dystrybucyjnych (słabych)** dowolnego rzędu dla zupełnie dowolnych funkcji.

Możemy teraz wyjaśnić, co to znaczy

"pochodna dystrybucyjna D^α elementu $v \in L^2(\Omega)$ należy do $L^2(\Omega)$"

Znaczy to poprostu, że istnieje taki element $w \in L^2(\Omega)$, że

$$D^\alpha T_v(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_v(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v D^\alpha \phi d\Omega = \int_\Omega w \phi d\Omega,$$

dla dowolnego elementu $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Przykład dystrybucji. Niech $\Omega = \mathbf{R}$, i niech

$$H_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < x \\ 1 & \text{dla } t \geq x \end{cases}.$$

Jest to tak zwana *funkcja Heviside'a.* Znajdziemy pochodną słabą funkcji H_x. Dystrybucja przyporządkowana H_x:

$$T_{H_x}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} H_x(t)\phi(t)dt.$$

Mamy

$$\frac{d}{dt} T_{H_x} = T_{\frac{d}{dt} H_x}(\phi) = -T_{H_x}(\phi') = -\int_{-\infty}^{\infty} H_x(t)\phi'(t)dt =$$

$$= -\int_x^\infty \phi'(t)dt = \phi(x),$$

gdyż $\phi(\infty) = 0$; a więc, $\frac{d}{dt}T_{H_x}(\phi) = \phi(x)$.

Pochodna dystrybucyjna funkcji H_x "wybija" wartość argumentu ϕ w punkcie x. Tę dystrybucję nazywa się **"deltą Dirac'a"** i oznacza się symbolem δ_x. W sensie słabym:

$$\frac{d}{dt}H_x = \delta_x, \qquad \delta_x(\phi) = \phi(x).$$

Dystrybucja δ_x nie należy do $L^2(\Omega)$. ∎

Teraz możemy odpowiedzieć na pytanie o konforemność przestrzeni elementu skończonego V_h dla $V = H^1(\Omega)$. Na postawione pytanie odpowiada poniższe Twierdzenie, które podaje warunek dostateczny na konforemność przestrzeni elementu skończonego.

Przypomnijmy uprzednio sformułowane założenia.

- $V = H^1(\Omega)$,
- Ω jest wielościanem d-wymiarowym,
- Elementy przestrzeni elementu skończonego V_h są "kawałkami wielomianami" stopnia $\leq s$. Dokładniej: dla każdego elementu T triangulacji τ_h

$$v_{h|T} \text{ jest wielomianem (d-zmiennych) stopnia } \leq s.$$

Twierdzenie. *Jeśli $v_h \in V_h$ jest funkcją ciągłą na Ω, to $v_h \in H^1(\Omega)$.*

Dowód. Trzeba udowodnić, że z ciągłości v_h wynika, że dla $j = 1, 2, \cdots, d$ pochodne dystrybucyjne

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_j}$$

należą do $L^2(\Omega)$. Niech dla $p \in T$, $w_{T,i}(p) = \frac{\partial v_h}{\partial x_i}(p)$ dla $i = 1, 2, \cdots, d$ gdzie

$$\tau_h = \{T_1, T_2, \cdots, T_M\}.$$

Funkcje $w_{T,i}$ na każdym simpleksie T są oczywiście dobrze określone, gdyż v_h na T jest wielomianem stopnia $\leq s$. Ponadto jeśli zdefiniujemy $w_i, \quad i = 1, 2, \cdots, d$ na Ω tak, że

$$w_{i|T}(p) = w_{T,i}(p) \text{ dla p } \in T,$$

to otrzymamy $w_i \in L^2(\Omega)$ dla $i = 1, 2, \cdots, d$. Jest tak, gdyż w_i pozostaje nieokreślone tylko na zbiorze wewnętrznych ścian wielościanu Ω, zaś zbiór ten jest d-wymiarowej miary zero.

Z Twierdzenia Greena i Twierdzenia Gaussa wynika, że na każdym simpleksie T mamy:

$$\int_T w_{i,T}\phi dT = \int_T \frac{\partial v_h}{\partial x_i}\phi dT = -\int_T v_h \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dT + \int_{\partial T} n_i v_h \phi dS, \quad i = 1, 2, \cdots, d,$$

gdzie $n_1, n_2, \cdots, d$ to składowe wersora normalnego zewnętrznego do ∂T i $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Weźmy teraz pod uwagę dwa simpleksy T_1 i T_2, stykające się wspólną ścianą S. Na tej wspólnej scianie S:

- v_h, jest ciągła,
- n_i $i = 1, 2, \cdots, d$ pochodzące od T_1 i T_2 różnią się znakiem.

Zsumujemy teraz stronami $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \cdots$ powyższy wzór. Otrzymamy dla $i = 1, 2, \cdots, d$:

$$\int_\Omega w_i \phi d\Omega = -\int_\Omega v_h \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{v_h}(\phi)$$

Co stało się z całkami po brzegach? Ze względu na to, co dzieje się na każdej wspólnej ścianie S, całki po brzegach wewnętrznych simpleksów znikną i pozostałaby tylko całka po $\partial\Omega$, gdyby nie funkcje ϕ, które mają nośniki zwarte w zbiorze otwartym Ω. Ostatecznie nie zostaje nic! Jak zauważyliśmy już wcześniej, $w_i \in L^2(\Omega), \quad i = 1, 2, \cdots, d$. Ze względu na definicję "należenia" pochodnej słabej do $L^2(\Omega)$, uwaga ta kończy dowód twierdzenia. ■

Wykład 10.

Grzechy wobec Metody Elementu Skończonego.

Opisana tutaj metoda Elementu Skończonego działa poprawnie pod warunkiem zachowania wszystkich przyjętych założeń. Jednak nie zawsze możemy, bądź też nie zawsze chcemy, te założenia spełnić. Dotyczy to najczęściej:

- Stosowania tych samych form a i l w sformułowaniu oryginalnym i przybliżonym naszego zadania. Użycie innych form określających "przybliżone" równanie wariacyjne, to jest pierwszy z *grzechów.* Do popełnienia tego grzechu może zmusić nas brak możliwości dokładnego "analitycznego" obliczenia całek potrzebnych do wyznaczenia form a i l. Możemy być zmuszeni do zastosowania *kwadratur numerycznych.* Niekiedy także może być nam wygodniej użyć kwadratury numerycznej niż obliczać analitycznie skomplikowane całki, szczególnie jeśli kwadratura numeryczna daje wynik z dokładnością tego samego rzędu co równanie aproksymujące nasze zadanie oryginalne.

- Zachowania *konforemności metody*, to znaczy budowania przestrzeni elementu skończonego w taki sposób, aby przestrzenie V_h były podprzestrzeniami przestrzeni V, na której jest określone zadanie oryginalne. Ten grzech zwykle jest popełniany z rozmysłem. Niekiedy ze względu na charakter rozwiązania zadania oryginalnego, a w szczególności ze względu na jego niską regularność, lepiej jest stosować wersję niekonforemną Metody Elementu Skończonego.

Rozpatrzmy te dwa przypadki

Zachowanie konforemności, ale zmienione formy a i l dla zadania przybliżonego.

Niech V będzie przestrzenią Hilberta, $V_h \subset V$ rodziną jej podprzestrzeni skończonego wymiaru.
Zadanie "oryginalne": szukamy $u \in V$ takiego, że

$$a(u, v) = lv \quad \forall v \in V.$$

Zadania "przybliżone": szukamy $u_h \in V_h$, takich, że

$$a_h(u_h, v_h) = l_h v_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

Zakładamy, że forma dwuliniowa a jest ciągła i koercywna ze stałymi odpowiednio M i γ; o formach a_h zakładamy, że są **jednakowo ciągłe i jednakowo koercywne**, to znaczy, ze istnieją stałe M i γ nie zależne od h, takie że

$$|a_h(u_h, v_h)| \leq M\|u_h\|\|v_h\|,$$

$$\gamma\|u_h\|^2 \leq a_h(u_h, u_h).$$

Przy tych założeniach z Twierdzenia Lax'a - Milgrama wynika, że zarówno zadanie "oryginalne", jak i zadania "przybliżone" mają jednoznaczne rozwiązania. Jednak przedstawiona dotychczas teoria zbieżności oparta o Twierdzenie Céa nie funkcjonuje. Twierdzenie Céa trzeba zstąpić czymś innym.

Pierwszy Lemmat Stranga. *Niech u i u_h będą odpowiednio rozwiązaniem zadania "oryginalnego" i "przybliżonego". Przy przyjętych założeniach istnieje stała C taka, że*

$$\|u - u_h\| \leq$$

$$\leq C\{\inf_{v_h \in V_h}[\|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h}\frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|}] + \sup_{w_h \in V_h}\frac{|lw_h - l_h w_h|}{\|w_h\|}\}$$

Komentarz. Zbieżność będzie zachowana przy odpowiednich warunkach aproksymacji nałożonych na podprzestrzenie V_h, pod warunkiem, że wyrażenia zawierające a, a_h oraz l i l_h po prawej stronie nierówności, dążą do zera. Zauważmy także, że część prawej strony przed którą stoi znak inf jest związany zarówno z aproksymacją przestrzeni V, przez V_h, jak i z aproksymacją formy a przez formy a_h. Pozostała część prawej strony dotyczy aproksymacji l przez l_h.

Dowód. Najpierw szacujemy $\|u_h - v_h\|$, gdzie $v_h \in V_h$ jest dowolnym elementem, wykorzystując koercywność a_h. Niech $w_h = u_h - v_h$. Wtedy

$$\gamma\|u_h - v_h\|^2 \leq a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) = a(u - v_h, w_h) - a(u - v_h, w_h) + a_h(u_h - v_h, w_h).$$

Stąd

$$\gamma\|u_h - v_h\|^2 \leq a(u - v_h, w_h) + a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h) - a(u, w_h) + a_h(u_h, w_h).$$

Dzieląc stronami przez $\|w_h\|$ i dobierając odpowiednio stałą C_1 otrzymamy

$$\|u_h - v_h\| \leq C_1[\|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h}\frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|}] + \sup_{w_h \in V_h}\frac{|lw_h - l_h w_h|}{\|w_h\|}.$$

Ponieważ $\|u_h - u\| \leq \|u_h - v_h\| + \|u - v_h\|$, po dodaniu do obu stron $\|u - v_h\|$ i dobraniu nowej stałej C otrzymamy

$$\|u - u_h\| \leq C\{[\|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|}] + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|lw_h - l_h w_h|}{\|w_h\|}\}.$$

Po obu stronach teraz bierzemy $\inf_{v_h \in V_h}$

$$\|u - u_h\| \leq$$

$$\leq C\{\inf_{v_h \in V_h} [\|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|}] + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|lw_h - l_h w_h|}{\|w_h\|}\}. \blacksquare$$

Jeśli mamy do czynienia z niekonforemnością Metody Elementu Skończonego trzeba Twierdzenie Céa zastąpić Drugim Lemmatem Stranga.

Drugi Lemmat Stranga. *Niech:*

- V*-przestrzeń Hilberta,*
- $a : V \times V \to \mathbf{R}$ *forma dwuliniowa ciągła ze stałą ciągłości* M *i koercywna ze stałą koercywności* $\gamma > 0$,
- $l : V \to \mathbf{R}$ *forma liniowa ciągła,*
- V_h *rodzina przestrzeni liniowych skończonego wymiaru, unormowanych, z normami* $\|\cdot\|_h$ *odpowiednio. Zakładamy, że normy* $\|\cdot\|_h$ *są określone na przestrzeniach* $V + V_h$. [7]
- $a_h : (V + V_h) \times (V + V_h) \to \mathbf{R}$ *rodzina form dwuliniowych ciągłych ze stałą ciągłości* M *nie zależną od* h *i koercywnych na* V_h *ze stałą koercywności* $\gamma > 0$ *niezależną od* h,

  $$\gamma \|v_h\|_h^2 \leq a_h(v_h, v_h)$$

  dla $v_h \in V_h$,
- $l_h : V_h \to \mathbf{R}$ *rodzina form liniowych ciągłych.*

[7] $V + V_h$, to przestrzeń elementów postaci $v + v_h$, gdzie $v \in V$ i $v_h \in V_h$.

Rozpatrujemy:
zadanie "oryginalne":
poszukujemy $u \in V$ spełniającego równanie wariacyjne

$$a(u, v) = lv \quad \forall_{v \in V}$$

oraz zadanie "przybliżone":
poszukujemy $u_h \in V_h$ spełniającego równanie wariacyjne

$$a_h(u_h, v_h) = l_h v_h \quad \forall_{v_h \in V_h}.$$

Przy przyjętych założeniach istnieje stała C, taka, że

$$\|u - u_h\|_h \leq C[\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(u, w_h) - l_h w_h|}{\|w_h\|_h}].$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że z Twierdzenia Laxa - Milgrama wynika istnienie jednoznacznych rozwiązań u i u_h, zarówno dla zagadnienia "oryginalnego", jak i dla zagadnień "przybliżonych". Wykorzystując teraz koercywność a_h szacujemy $u_h - v_h = w_h$ dla dowolnego $v_h \in V_h$

$$\gamma \|u_h - v_h\|_h^2 \leq a_h(u_h - v_h, w_h) =$$

$$= a_h(u - v_h, w_h) - a_h(u - v_h, w_h) + a_h(u_h - v_h, w_h) =$$
$$= a_h(u - v_h, w_h, w_h) + l_h w_h - a_h(u, w_h).$$

Stąd

$$\gamma \|u_h - v_h\|_h \leq M\|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(u, w_h) - l_h w_h|}{\|w_h\|_h}.$$

Podobnie jak w dowodzie Pierwszego Lemmatu Stranga dodajemy stronami $\|u - v_h\|_h$, i po dobraniu stałej C oraz wzięciu $\inf_{v_h \in V_h}$ po obu stronach, otrzymujemy tezę:

$$\|u - u_h\|_h \leq C[\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(u, w_h) - l_h w_h|}{\|w_h\|_h}]. \quad \blacksquare$$

Z Drugiego Lemmatu Stranga wynika zbieżnosc metody, pod warunkiem, że przestrzenie V_h mają odpowiednie *własności aproksymacyjne* dla przestrzeni V, oraz pod warunkiem, że wyrażenie w tezie, rozpoczynające się od $\sup_{w_h \in V_h}$ dąży do zera, gdy $h \to 0$.

Uwagi dotyczące realizacji algorytmów Metody Elementu Skończonego.

- **Element bazowy.** Wszystkie simpleksy wchodzące w skład triangulacji τ_h tworzymy na ogół, dokonując przekształcenia afinicznego *simpleksu bazowego* $\hat{T}$. Dla przestrzeni $\mathbf{R^2}$, $\hat{T}$ to trójkąt dany przez nierówności
$$0 \leq x + y \leq 1,$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

- Wspomniane wyżej przekształcenie afiniczne jest postaci $F(\hat{p}) = B\hat{p}+b$, gdzie $\hat{p} \in \hat{T}$, B jest macierzą, zaś b wektorem. Nie trudno zauważyć, że
$$cond(B) = \|B\|\|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_{\hat{T}}}\frac{h_T}{\rho_T},$$
gdzie ρ_T i $\rho_{\hat{T}}$, to odpowiednio średnice sfer wpisanych simpleksów T i $\hat{T}$, zaś h_T i $h_{\hat{T}}$ średnice tych simpleksów. Dowód pozostawiamy jako zadanie. Nierówność ta wskazuje na to, że jeśli triangulacja jest **regularna**, to współczynnik uwarunkowania przekształcenia afinicznego F jest ograniczony, gdyż $\rho_{\hat{T}}$ i $h_{\hat{T}}$, jako wymiary związane z simpleksem wzorcowym, są ustalone.

- Przez to przekształcenie afiniczne odwzorowujemy **cały element**
$$\{\hat{T}, \mathcal{P}_{\hat{T}}, \Sigma_{\hat{T}}\}$$
na element
$$\{T, \mathcal{P}_T, \Sigma_T\}.$$
Warto więc zastanowić się, jaka jest postać poszczególnych składników tego elementu przekształconego.

Wykład 11.

Wstęp. Będzie nam potrzebne kilka pojęć z Analizy Funkcjonalnej. Przypomnijmy.

- **OPERATOR DUALNY.** Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $A : X \to Y$, operatorem liniowym i ograniczonym. Symbolem X' oznaczamy *przestrzeń dualną do* X, to jest przestrzeń Banacha wszystkich funkcjonałów liniowych i ograniczonych określonych na X. Norma w X', to zwykła norma funkcjonału. Elementy przestrzeni X' będziemy oznaczali symbolami $x', y' \cdots$. Zamiast pisać $x'(x)$ dla $x' \in X'$ i $x \in X$ będziemy często pisać $< x', x >$; zatem $x'(x) =< x', x >$.

  Niech $x \in X$ i $y' \in Y'$, będą dowolnymi elementami. Zauważmy, że $< y', Ax >$ określa funkcjonał liniowy nad X, możemy więc napisać

  $$< y', Ax >=< A'y', x >,$$

  gdzie $A' : Y' \to X'$. W ten sposób określony został operator A', zwany *operatorem dualnym (do A)*. Łatwo sprawdzić, że A' jest liniowy i ograniczony, a dokładniej $\|A'\| = \|A\|$.

- **JĄDRA, UZUPEŁNIENIA ORTOGONALNE I ZBIORY POLARNE.** Przy powyższych założeniach:

  $$KerA = \{x \in X \mid Ax = 0\},$$

  $$KerA' = \{y' \in Y' \mid A'y' = 0\} = \{y' \in Y' \mid < y', Ax >= 0 \ \forall \ x \in X\}.$$

  Są to jądra A i A'. Jądro operatora liniowego i ograniczonego jest domknięte.

  Jeśli $Z \subset V$, gdzie V jest przestrzenią Hilberta, to

  $$Z^{\perp} = \{v \in V \mid (z, v) = 0 \ \forall \ z \in Z\}.$$

  Jeśli Z jest podprzestrzenią domknięta, to $Z^{\perp}$ nazywa się *uzupełnieniem ortogonalnym* Z.

  Jeśli $U \subset X$ i $U = \bar{U}$, to $U^0 = \{x' \in X' \mid < x', u >= 0 \ \forall \ u \in U\}$ nazywa się *zbiorem polarnym dla* U. Zbiór polarny jest domknięty.

- **PRZESTRZEŃ BIDUALNA, PRZESTRZEŃ REFLEKSYWNA.** Przestrzeń dualna przestrzeni dualnej, to przestrzeń *bidualna*: $(X')' = X''$. Jej elementami są funkcjonały liniowe ograniczone nad X'. Zauważmy, że jeśli $x' \in X'$, to dla dowolnego ustalonego $x \in X$, $x''(x') = x'(x)$, $x'' \in X''$, a zatem $x \mapsto x''$ definiuje odwzorowanie liniowe X w X''. Jeśli to odwzorowanie jest izomorfizmem X i X'', to przestrzenie X i X'' można uważać za identyczne. Mówimy wtedy, że *przestrzeń X jest refleksywna.* Każda przestrzeń Hilberta jest refleksywna.

Zbadajmy co to jest $(KerA')^0$. Mamy $A' : Y' \to X'$.

$$(KerA')^0 =$$

$$= \{y'' \in Y'' \mid \ < y'', y' >= 0 \ \forall y' \in Y' \text{ takiego, że } < y', Ax >= 0 \ \forall \ x \in X\}.$$

Jeśli przestrzeń Y jest refleksywna ($Y = Y''$)

$$(KerA')^0 =$$

$$= \{y \in Y \mid \ < y', y >= 0 \ \forall \ y' \in Y' \text{ takiego, że } < y', Ax >= 0 \ \forall \ x \in X\}.$$

Zauważmy, że wtedy $AX \subset (KerA')^0$.

Twierdzenie. *Niech X i Y będą refleksywnymi przestrzeniami Banacha, $A : X \to Y$ - operatorem liniowym i ograniczonym. Wtedy*

$$AX = \overline{AX} \text{ w } Y \ \Leftrightarrow \ AX = (KerA')^0.$$

Dowód. Zauważmy, że wystarczy udowodnić, że $\overline{AX} = (KerA')^0$. Wiemy już, że $AX \subset (KerA')^0$. Ponieważ każdy zbiór polarny jest domknięty, to również $\overline{AX} \subset (KerA')^0$. Przypuśćmy, że $\overline{AX} \neq (KerA')^0$. Wtedy istnieje taki element $y_0 \in (KerA')^0$, ze $y_0 \notin \overline{AX}$. Wiadomo, że wtedy istnieje taki funkcjonał $y_0{}' \in Y'$, że $< y_0', y_0 >\neq 0$, zaś $< y_0', Ax >= 0$, $\forall \ x \in X$. Ale dochodzimy w ten sposób do sprzeczności, gdyż jeśli $y_0 \in (KerA')^0$, to musi być $< y_0', y_0 >= 0$, jeśli $< y_0', Ax >= 0 \ \forall \ x \in X$. Zatem nie może być $\overline{AX} \neq (ker A')^0)$. [8]

Ogólniejsze równanie wariacyjne.

Niech U i V będą przestrzeniami Hilberta. Jeśli nie będzie to konieczne, nie będziemy rozróżniać oznaczeniami norm tych przestrzeni. Niech

$$a : U \times V \to \mathbf{R} \text{ będzie formą dwuliniową,}$$

zaś niech $l \in V'$. Ponadto założymy, że

(1) $\exists M \geq 0 \ \ \forall \ u \in U \ \ \forall \ v \in V \ \ |a(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$ (ciągłość),

(2) $\exists \gamma > 0 \ \ \forall \ u \in U \ \ \gamma\|u\| \leq \sup\limits_{v \in V} \dfrac{a(u,v)}{\|v\|}$ (warunek inf-sup),

(3) $\forall \ v \in V, \ v \neq 0 \ \exists \ u \in U \ \ a(u,v) \neq 0.$

Rozważamy równanie wariacyjne

(4) poszukujemy $u \in U$ takiego, że $a(u,v) = lv \ \ \forall \ \ v \in V.$

Twierdzenie NNBA (Nečas, Nirenberg, Babuška, Aziz.) *Jeśli spełnione są warunki* (1), (2), (3), *to równanie wariacyjne* (4) *ma jednoznaczne rozwiązanie* $u \in U$ *dla każdego* $l \in V'$.

Dowód. Wiemy, że forma a definiuje operator liniowy:

$$a(u,v) =< Au, v >, \quad A : U \to V'.$$

- **Operator A jest ciągły.** Mamy

$$\|Au\| = \sup_{v \in V, \ \|v\|=1} | < Au, v > | = \sup_{v \in V, \ \|v\|=1} |a(u,v)| \leq$$

$$\leq \sup_{v \in V, \ \|v\|=1} M\|u\|\|v\| = M\|u\|,$$

a więc $\|A\| \leq M$.

[8] Gdy X i Y są przestrzeniami Hilberta (nas interesuje właśnie ten przypadek) łatwo znaleźć funkcjonał y_0'. Niech $P : Y \to \overline{AX} \subset Y$ będzie operatorem *rzutu ortogonalnego* na podprzestrzeń domkniętą $\overline{AX}$. Wtedy $y_0' = \tau(y_0 - Py_0)$, gdzie $\tau : Y \to Y'$ jest izomorfizmem Riesza. Z definicji P wynika, że $< y_0', Ax >= 0 \ \forall \ x \in X$, natomiast warunek $< y_0', y_0 > \neq 0$ wynika z nierówności Schwarza i własności boków trójkąta prostokątnego.

- **Odwracalność** A. Przypuśćmy, że A nie jest odwracalny. Wtedy w U istnieją dwa elementy różne $u_1 \neq u_2$ i $Au_1 = Au_2$. Mamy wtedy z warunku "inf-sup"

$$\gamma\|u_1 - u_2\| \leq \sup_{v\in V} \frac{a(u_1 - u_2, v)}{\|v\|} = \sup_{v\in V} \frac{< A(u_1 - u_2), v >}{\|v\|} = 0$$

  a więc $u_1 = u_2$, wbrew założeniu.

- **Ciągłość** A^{-1} **na** AU. Niech $l \in AU \subset V'$ i niech $u = A^{-1}l$. Wtedy z warunku "inf-sup"

$$\gamma\|u\| \leq \sup_{v\in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|} = \sup_{v\in V} \frac{< Au, v >}{\|v\|} = \sup_{v\in V} \frac{< l, v >}{\|v\|} = \|l\|.$$

  To oznacza, że $\|u\| = \|A^{-1}l\| \leq \frac{1}{\gamma}\|l\|$, a więc A^{-1} jest ograniczony na AU.

- **Domkniętość** AU**.** Ponieważ $U = A^{-1}AU$ to AU jest przeciwobrazem zbioru domkniętego U przez funkcję ciągłą A^{-1} jest więc zbiorem domkniętym w V'.

- $AU = (KerA')^0$. Wynika to z domkniętości AU (patrz "Twierdzenie"). Zatem
$$AU = \{v \in V|\ a(u, v) = 0\ \forall\ u \in U\}^0 \subset V'.$$

- $A : U \to V'$ **jest odwzorowaniem na całą przestrzeń** V'**.** Istotnie, ze względu na warunek (3) $KerA' = \{0\}$, więc $AU = (KerA')^0 = V'$. ■

Teraz zajmiemy się "zagadnieniem przybliżonym". Zastosujemy *(konforemną)* metodę Ritza-Galerkina. Niech $U_h \subset U$, $V_h \subset V$ będą rodzinami podprzestrzeni skończonego wymiaru. Trzeba będzie założyć, że są one dobrane do siebie tak, aby

$$(3') \qquad \forall\ h \in \omega\ \forall\ u_h \in U_h\ \gamma\|u_h\| \leq \sup_{v_h\in V_h} \frac{a(u_h, v_h)}{\|v\|},$$

(można założyć, że stała γ jest ta sama co we wzorze (3))

$$(4') \qquad \forall\ h \in \omega\ \forall\ v_h \in V_h\ v_h \neq 0\ \exists\ u_h \in U_h\quad a(u_h, v_h) \neq 0.$$

Równanie "przybliżone"

(5) poszukujemy $u_h \in U_h$ takiego, że $a(u_h, v_h) = lv_h \ \ \forall\ v_h \in V_h$.

Ponieważ założyliśmy spełnienie warunków (3') i (4'), równanie (5) ma dla każdego $h \in \omega$ jednoznaczne rozwiązanie $u_h \in U_h$.

Realizacja. Przestrzenie U_h i V_h dobieramy tak, aby były tego samego wymiaru dla każdego ustalonego h. Niech

$$U_h = \mathrm{span}\{\phi_1^h, \phi_2^h, \cdots, \phi_{M_h}^h\},$$

$$V_h = \mathrm{span}\{\psi_1^h, \psi_2^h, \cdots, \psi_{M_h}^h\}.$$

Wtedy

$$u_h = \sum_{j=1}^{M_h} \phi_j^h c_j^h.$$

Nasze równanie (5) może być teraz zapisane tak

(6) $$\sum_{j=1}^{M_h} a(\phi_j^h, \psi_k^h) c_j^h = l\psi_k^h, \quad k = 1, 2 \cdots, M_h.$$

Jest to układ równań algebraicznych liniowych

(6') $$A_h \underline{c}_h = \underline{l}_h,$$

o macierzy

$$A_h = (a_{i,j}^h), \quad a_{i,j} = a(\phi_j^h, \psi_i^h),$$

Odwracalność macierzy A_h wynika z warunków (3')(4').

Lemmat. *Jeśli u jest rozwiązaniem równania* (4)*, zaś u_h rozwiązaniem równania* (5)*, to*

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \ \ \forall \ \ v_h \in V_h.$$

Dowód. Mamy

$$a(u, v_h) = lv_h \ \ \forall\ v_h \in V_h \subset V,$$

oraz

$$a(u_h, v_h) = lv_h \ \ \forall\ v_h \in V_h \subset V.$$

Odejmując stronami te równości otrzymujemy tezę. ∎

Twierdzenie o zbieżności. *Jeśli u jest rozwiązaniem równania* (4), *zaś* u_h *rozwiązaniem równania* (5), *to*

$$\|u - u_h\| \leq (1 + \frac{M}{\gamma}) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|,$$

gdzie M i γ jest odpowiednio stałą ciągłości i koercywności formy a.

Dowód. Niech $w_h \in U_h$ będzie dowolnym elementem U_h. Z Lemmatu wynika

$$a(u - w_h + w_h - u_h, v_h) = 0 \ \ \forall \ \ v_h \in V_h.$$

Stad

$$a(u - w_h, v_h) = a(u_h - w_h, v_h) \ \ \forall \ \ v_h \in V_h.$$

Wykorzystując warunek "inf-sup", otrzymamy

$$\gamma \|u_h - w_h\| \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u - w_h, v_h)}{\|v_h\|} \leq M\|u - w_h\|,$$

a więc

$$\|u_h - w_h\| \leq \frac{M}{\gamma}\|u - w_h\|.$$

Ponieważ

$$\|u_h - u\| \leq \|u_h - w_h\| + \|u - w_h\|,$$

po dodaniu po obu stronach poprzedniej nierówności $\|u - w_h\|$ otrzymamy

$$\|u - u_h\| \leq (1 + \frac{M}{\gamma})\|u - w_h\|,$$

zaś biorąc po obu stronach tej ostatniej nierówności $\inf_{w_h \in U_h}$ otrzymamy tezę. ∎

Wykład 12.

POBLEM PUNKTU SIODŁOWEGO. Niech U i V będą przestrzeniami Hilberta. Dane są dwie formy dwuliniowe a i b

$$a : U \times U \to \mathbf{R},$$

$$b : U \times V \to \mathbf{R},$$

oraz $f \in U'$, $g \in V'$

Genezą problemu punktu siodłowego jest poszukiwanie *minimum* funkcjonału nieliniowego

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - < f, u >$$

dla $u \in U$ spełniających warunek

$$b(u, \mu) = < g, \mu >$$

dla każdego $\mu \in V$.

Utwórzmy tak zwaną *funkcję Lagrange'a:*

$$L(u, \lambda) = J(u) + [b(u, \lambda) - < g, \lambda >].$$

Poszukiwanie ekstremum J przy wspomnianym warunku sprowadza się do rozwiązania układu 2 równań

$$\frac{\partial}{\partial u} L(u, \lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(u, \lambda) = 0,$$

gdzie pochodne są rozumiane w sensie Frécheta.[9]

[9]Niech $F : X \to Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami Banacha zaś $h \in X$ jest dowolnym elementem X. Przypuśćmy, że istnieje operator liniowy ograniczony, zależny (na ogół w sposób nieliniowy od $x \in X$), $A(x) : X \to Y$, taki, że $F(x+h) - F(x) = A(x)h + \omega(x,h)$ i $\frac{\|\omega(x,h)\|}{\|h\|} \to 0$, gdy $h \to 0$. Wtedy operator $A(x) : X \to Y$ nazywa się **pochodną Frécheta** funkcji F w punkcie $x \in X$, zaś $A(x)h \in Y$ nazywa się **różniczką Frécheta** funkcji F w punkcie x dla przyrostu $h \in X$.

Łatwo obliczamy:

$$\frac{\partial}{\partial u}L(u,\lambda)h = \hat{a}(u,h) - < f,h > + b(h,\lambda), \quad h \in U,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}L(u,\lambda)k = b(u,k) - < g,k >, \quad k \in V,$$

gdzie $\hat{a}(u,h) = \frac{1}{2}[a(u,h) + a(h,u)]$. Równania wyznaczające punkt stacjonarny są w tym przypadku postaci

$$\hat{a}(u,h) + b(h,\lambda) =< f,h >, \quad \forall\ h \in U,$$

$$b(u,k) =< g,k >, \quad \forall\ k \in V.$$

Tutaj $\hat{a}$ jest formą dwuliniową symetryczną. Pozbywamy się tego warunku symetrii; uogólniając, będziemy nazywali *zagadnieniem punktu siodłowego* następujący układ dwóch równań wariacyjnych:

(PS) poszukujemy pary $u \in U, \quad \lambda \in V$ takiej , że

$$a(u,h) + b(h,\lambda) =< f,h > \quad \forall\ h \in U,$$
$$b(u,k) =< g,k > \quad \forall\ k \in V,$$

gdzie a i b - to formy dwuliniowe ograniczone, $a : U \times U \to \mathbf{R}$, $b : U \times V \to \mathbf{R}$, $f \in U'$, $g \in V'$.

Wiemy już, że formy a i b określają operatory A i B

$$a(u,h) =< Au,h >, \quad A : U \to U',$$

$$b(u,k) =< Bu,k >, \quad B : U \to V',$$

$$b(k,u) =< Bk,u >=< B'u,k >, \quad B' : V \to U'.$$

Równania (PS) możemy zapisać w sposób równoważny, posługując się operatorami A i B

$$Au + B'\lambda = f,$$

$$(PS') \qquad Bu = g.$$

Wygodnie będzie jeszcze oznaczyć

$$W = \{w \in U \mid b(w,k) = 0 \ \ \forall\ k \in V\} = KerB.$$

Lemat. *Warunki 1, 2, 3 są równoważne:*

1. $\exists\ \gamma > 0 \quad \gamma\|\mu\| \leq \sup_{v\in V} \frac{b(v,\ \mu)}{\|v\|}$,

2. $b(v,\ \mu) =< Bv,\ \mu >$
   $B : U \to V'$,
   $B : W^{\perp} \to V'$ *jest izomorfizmem na i* $\quad \|Bv\| \geq \gamma\|v\|$,

3. $B' : V \to U'$
   $B' : V \to W^0 \subset U'$ *jest izomorfizmem na i* $\quad \|B'\mu\| \geq \gamma\|\mu\|$.

Dowód.

- *1.* $\Rightarrow$ *3.* Mamy $b : U \times V \to \mathbf{R}$, oraz

  $$\gamma\|\mu\| \leq \sup_{u\in U} \frac{b(u,\mu)}{\|u\|} = \sup_{u\in U} \frac{< Bu, \mu >}{\|u\|} = \sup_{u\in U} \frac{< B'\mu, u >}{\|u\|} = \|B'\mu\|,$$

  a więc B'^{-1} istnieje i jest ograniczony: $B' : V \to B'V \subset U'$. Oznacza to, że $B'V$ jest przeciwobrazem przez B^{-1} zbioru domkniętego V. Stąd wynika, że $B'V = \overline{B'V}$, a więc $B'V = (KerB)^0 = W^0$. A więc

  $$B' : V \to W^0$$

  jest izomorfizmem i $\gamma\|\mu\| \leq \|B'\mu\|$.

- *3.* $\Rightarrow$ *1.* Jeśli $\|B'\mu\| \geq \gamma\|\mu\|$, to

  $$\sup_{u\in U} \frac{b(u,\mu)}{\|u\|} = \sup_{u\in U} \frac{< B'\mu, u >}{\|u\|} = \|B'\mu\| \geq \gamma\|\mu\|.$$

- *3.* $\Rightarrow$ *2.* Mamy $b(u,\mu) =< B'\mu, u >$, a ponieważ $B' : V \to W^0 \subset U'$ jest izomorfizmem, to $\forall\ \lambda \in W^0 \subset U' \quad \exists\ v \in V \quad B'v = \lambda$. Niech $u \in W^{\perp}$; $(u,\cdot)_U$ jest funkcjonałem nad U, zatem $(u,\cdot)_U \in W^0$. Istnieje zatem $v \in V$, $B'v = (u,\cdot)_U$, a więc, dla takiego v

  $$\forall\ w \in U \quad < B'v, w >= (u,w)_U =< Bw, v >= b(w,v).$$

Podstawmy $w = u \in W^{\perp}$; stąd

$$\sup_{k \in V} \frac{b(u,k)}{\|k\|} \geq \frac{b(u,v)}{\|v\|} = \frac{(u,u)_U}{\|v\|} = \frac{\|u\|^2}{\|v\|}.$$

Ale z twierdzenia Riesza wynika, że $\|u\| = \|B'v\| \geq \gamma\|v\|$. Zatem ostatecznie $\forall\ u \in W^{\perp} \subset U$

$$\sup_{k \in V} \frac{b(u,k)}{\|k\|} = \sup_{k \in V} \frac{< Bu, k >}{\|k\|} = \|Bu\| = \frac{\|B'v\|\|u\|}{\|v\|} \geq \gamma\|u\|.$$

To znaczy, że forma b jest ograniczona i spełnia warunek "inf-sup". Pokażemy jeszcze, że

$$\forall\ k \in V, \quad k \neq 0\ \ \exists\ u \in U \quad b(u,k) \neq 0.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest; wtedy

$$\exists\ k \neq 0\ \ \forall\ u \in U \quad b(u,k) =< Bu, k >=< B'k, u >= 0.$$

Ponieważ jednak $B' : V \to W^0$ jest izomorfizmem, to $B'k = 0 \ \Rightarrow\ k = 0$. Stad sprzeczność z założeniem, że $k \neq 0$. Zatem na podstawie **Twierdzenia NNBA** $B : W^{\perp} \to V'$ jest izomorfizmem i $\|Bu\| \geq \gamma\|u\|$, to znaczy, że *3.* $\Rightarrow$ *2.*

- *2.* $\Rightarrow$ *1.* Niech $g \in V'$. Wtedy $\forall\ \mu \in V$ mamy

$$\|\mu\| = \sup_{g \in V'} \frac{< g, \mu >}{\|g\|}.$$

Ponieważ $B : W^{\perp} \to V'$ jest izomorfizmem, to istnieje $u \in W^{\perp}$ taki, że $Bu = g$. Zatem

$$\|\mu\| = \sup_{u \in W^{\perp}} \frac{< Bu, \mu >}{\|Bu\|} \leq \sup_{u \in W^{\perp}} \frac{b(u,\mu)}{\gamma\|u\|} \leq \sup_{u \in U} \frac{b(u,\mu)}{\gamma\|u\|},$$

gdyż $\|Bu\| \geq \gamma\|u\|$; to znaczy, że

$$\gamma\|\mu\| \leq \sup_{u \in U} \frac{b(u,\mu)}{\|u\|}. \quad \blacksquare$$

Twierdzenie Franco Brezzi. *Jeśli spełnione są następujące warunki:*

$$\exists\ \alpha > 0 \quad \alpha\|u\| \leq a(u,u) \quad \forall\ u \in W = Ker\ B \subset U,$$

$$\exists\ \gamma > 0 \quad \gamma\|\mu\| \leq \sup_{u\in U} \frac{b(u,\mu)}{\|u\|} \quad \forall\ \mu \in V,$$

to zagadnienie (PS) *ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych* $f \in U'$ *i* $g \in V'$.

Dowód.

1. Drugie równanie (PS) jest postaci $b(u,k) =< g,k > \quad \forall\ k \in V$. Ze względu na drugi punkt tezy Lemmatu, znajdziemy taki element

$$u_0 \in W^{\perp}, \quad \text{że} \quad Bu_0 = g.$$

2. Teraz poszukujemy $w_0 \in W = Ker\ B$ takiego, że

$$a(u_0 + w_0, v) =< f, v >, \quad \forall\ v \in W \subset U,$$

lub też inaczej, poszukujemy rozwiązania w_0 równania

$$a(w_0, v) =< f, v > -a(u_0, v), \quad \forall\ v \in W \subset U.$$

Takie $w_0 \in W$ istnieje i jest jednoznaczne, gdyż nasze równanie spełnia założenia Twierdzenia Laxa-Milgrama.

3. Teraz szukamy λ, z równania

$$b(v,\lambda) =< f, v > -a(u_0, v) - a(w_0, v), \quad \forall\ v \in U.$$

Funkcjonał występujący po prawej stronie oznaczymy symbolem F:

$$< F, v >=< f, v > -a(u_0, v) - a(w_0, v).$$

Z Lemmatu (punkt *3.*) wiemy, że

$$B' : V \to W^0 \subset U'$$

jest izomorfizmem, zatem istnienie rozwiązania λ jest równoważne warunkowi $F \in W^0$, czyli warunkowi

$$< F, w >= 0 \quad \forall\ w \in W.$$

Ale ten warunek jest spełniony ze względu na definicję w_0 w punkcie 2. tego dowodu. ∎

Aproksymacja zadania (PS). Wybieramy podprzestrzenie skończonego wymiaru $U_h \subset U$, oraz $V_h \subset V$, oraz definiujemy

$$W_h = \{w \in U_h | \ b(w,k) = 0 \ \ \forall \ k \in V_h\},$$

$$W_h(g) = \{w \in U_h | \ b(w,k) =< g,k > \quad \forall \ k \in V_h\}.$$

Zauważmy, że na ogół $W_h \not\subset W = ker \ B \subset U$.

Warunki LBB (Ladyženska, Babuška, Brezzi). Są to warunki **nałożone na podprzestrzenie** $U_h \subset U$ **i** $V_h \subset V$. Formy

$$a : U \times U \to \mathbf{R},$$

$$b : U \times V \to \mathbf{R}$$

są ograniczone i ponadto

(A) $\quad a$ jest W_h -koercywna $\exists \ \alpha > 0 \ \ \alpha \|u_h\| \leq a(u_h,u_h) \ \ \forall \ u_h \in W_h$,

zakładamy też, że forma b spełnia następujący warunek "inf-sup":

$$(B) \qquad \exists \ \gamma > 0, \ \ \gamma \|\mu_h\| \leq \sup_{v_h \in U_h} \frac{b(v_h,\mu_h)}{\|v_h\|} \ \ \forall \ \mu_h \in V_h.$$

Problem "przybliżony".

poszukujemy pary $(u_h,\lambda_h) \in U_h \times V_h$ spełniającej równania

$$(PS_h) \qquad a(u_h,v) + b(v,\lambda_h) =< f,v > \quad \forall \ v \in U_h,$$

$$b(u_h,k) =< g,k > \quad \forall \ \ k \in V_h.$$

Zauważmy, że ze względu na warunek **LBB**, dla problemu (PS_h) zawsze istnieje jednoznaczne rozwiązanie.

Realizacja. Przypuśćmy, że znamy bazy dla przestrzeni $U_h \subset U$ i dla przestrzeni $V_h \subset V$

$$U_h = span\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_M\},$$

$$V_h = span\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_M\}.^{10}$$

Mamy

$$u_h = \sum_{j=1}^{M} \phi c_j, \quad \lambda_h = \sum_{j=1}^{M} \psi_j d_j,$$

więc "równania przybliżone" możemy zapisać w formie macierzowej

$$\begin{bmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{c} \\ \underline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{g} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$A_h = (a_{k,j}), \quad a_{k,j} = a(\phi_j, \phi_k),$$
$$B_h = (b_{k,j}), \quad b_{k,j} = b(\phi_j, \psi_k),$$
$$\underline{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_M]^T,$$
$$\underline{d} = [d_1, d_2, \cdots, d_M]^T,$$
$$\underline{f} = [< f, \phi_1 >, < f, \phi_2 >, \cdots, < f, \phi_M >]^T,$$
$$\underline{g} = [< g, \psi_1 >, < g, \psi_2 >, \cdots, < g, \psi_M >]^T.$$

Pierwsze Twierdzenie o zbieżności. *Niech $(u, \lambda) \in U \times V$ i $(u_h, \lambda_h) \in U_h \times V_h$ będą rozwiązaniami równań (PS) i (PS_h) odpowiednio. Wtedy, jeśli spełniony jest warunek* **LBB**, *to*

$$\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\| \leq C \, [\inf_{w_h \in W_h(g)} \|u - w_h\| + \inf_{\mu_h \in V_h} \|\lambda - \mu_h\|],$$

gdzie C jest stałą niezależną od h.

Dowód. Odejmijmy stronami odpowiadające sobie równania z układu (PS) i (PS_h). Otrzymamy

$$a(u - u_h, v) + b(v, \lambda - \lambda_h) = 0, \quad \forall \; v \in U_h,$$

$$b(u - u_h, k) = 0 \;\; \forall \; k \in V_h.$$

Zauważmy od razu, że z drugiego równania wynika, że $u - u_h \in W_h$. Ponadto z drugiego równania (PS) i (PS_h) wynika, że odpowiednio, $u \in W(g)$, zaś

[10] Zarówno ϕ_j, ψ_j, jak i M zależą na ogół od h, czego nie uwidaczniamy w notacji, aby nie komplikować oznaczeń.

$u_h \in W_h(g)$. Niech $w_h \in W_h(g)$, $\mu_h \in V_h$. Odejmując i dodając te elementy, dostaniemy

$$(*) \qquad a(u_h - w_h, v) + b(v, \lambda - \mu_h) = a(u - w_h, v) + b(v, \lambda - \mu_h).$$

Podstawmy teraz $v = u_h - w_h \in W_h$. Wtedy $b(u_h - w_h, \lambda_h - \mu_h) = 0$, gdyż $u_h - w_h \in W_h$, zaś $\lambda_h - \mu_h \in V_h$. Wykorzystując teraz ciągłość form a i b, oraz W_h-koercywność formy a, otrzymamy

$$(**) \qquad \|u_h - w_h\| \leq C_1 \, [\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\|],$$

gdzie C_1 jest pewna stałą niezależną od h.

Wróćmy teraz do wzoru $(*)$. Dzieląc stronami przez $\|v\|$, wykorzystując warunek "inf-sup", oraz ciągłość form a i b otrzymamy, dla pewnej stałej C_2

$$\|\lambda_h - \mu_h\| \leq C_2[\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\| + \|u_h - w_h\|].$$

Teraz podstawiając $(**)$ do ostatniej nierówności, oraz dobierając odpowiednio stałą C_3, stwierdzamy, że

$$\|\lambda_h - \mu_h\| \leq C_3 \, [\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\|].$$

Po dodaniu stronami nierówności $(**)$, oraz dobraniu stałej C_4, mamy

$$\|u_h - w_h\| + \|\lambda_h - \mu_h\| \leq C_4 \, [\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\|].$$

Jeszcze dodajemy stronami $\|u - w_h\| + \|\lambda - \mu_h\|$, wykorzystujemy po lewej stronie nierówność trójkąta, oraz dobieramy stałą C. Po wzięciu po obu stronach $\inf_{w_h \in W_h(g)}$, $\inf_{\mu_h \in V_h}$ otrzymamy tezę twierdzenia. ∎

Pierwsze Twierdzenie o Zbieżności, podaje oszacowanie błędu dla u w zależności od $\|u - w_h\|$ oraz $\|\lambda - \mu_h\|$. Ze względu na to, że $W_h \not\subset W$, oszacowania błędu dla u nie da się odseparować od błędu dla λ. Jest to niekorzystne, gdyż często w konkretnych przypadkach, aproksymacja dla λ jest słabsza niż możliwa do uzyskania aproksymacja u. Dodanie warunku, zwanego *warunkiem* C pozwala pozbyć się tego kłopotu. Jednakże założenie warunku C nakłada jeszcze więcej wymagań na dobór przestrzeni U_h i V_h.

Drugie Twierdzenie o Zbieżności. *Załóżmy, że podprzestrzenie* $U_h \subset U$ *i* $V_h \subset V$ *spełniają warunki* **LBB**, *oraz że spełniony jest* **warunek C**

$$(C) \qquad W_h \subset W = Ker\ B.$$

Wtedy zachodzi następujące oszacowanie:

$$\|u - u_h\| \le C \inf_{w_h \in W_h(g) \subset U_h} \|u - w_h\|.$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia najpierw odejmujemy stronami odpowiednie równania (PS) i (PS'). Otrzymamy

$$a(u - u_h, v) + b(v, \lambda - \lambda_h) = 0 \ \ \forall\ v \in U_h \subset U,$$

$$b(u - u_h, k) = 0 \ \ \forall\ k \in V_h \in V.$$

Niech $w_h \in W_h(g)$; Odejmujemy i dodajemy w_h i dostajemy

$$a(u_h - w_h, v) = a(u - w_h, v) + b(v, \lambda - \lambda_h).$$

Podstawmy teraz $v = u_h - w_h$. Zauważmy, że ze względu na warunek **(C)** $b(u_h - w_h, \lambda - \lambda_h) = 0$. Zatem pozostaje tylko

$$a(u_h - w_h, u_h - w_h) = a(u - w_h, u_h - w_h).$$

Warunek W_h- koercywności formy a, oraz jej ciągłość dają nierówność

$$\|u_h - w_h\| \le \ C_1 \|u - w_h\|.$$

Po dodaniu stronami $\|u - w_h\|$, skorzystaniu z nierówności trójkąta, oraz po wzięciu po obu stronach $\inf_{w_h \in W_h(g)}$ otrzymamy tezę. ∎

Ważnym przykładem zagadnienia punktu siodłowego jest zagadnienie Stokesa w postaci uogólnionej. Jego wersja klasyczna, to:

$$-\Delta \underline{u}(x) - \nabla p(x) = f(x),$$

$$\mathrm{div}\underline{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\underline{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

i dodatkowo, dla jednoznaczności $\int_\Omega p(x) d\Omega = 0$. Zmienną $\underline{u}$ interpretuje się jako pole prędkości w obszarze Ω, zaś p-jako ciśnienie.

NRC
ZADANIA Z ĆWICZEŃ

1. Przypomnij definicję normy macierzy kwadratowej. Podaj różne realizacje normy w zależności od przyjętej normy w przestrzeni wektorowej.

2. Na siatce równomiernej zaaproksymuj przez różnice dzielone pochodna pierwsza, druga,... Użyj różnic w przód i w tył, różnicy centralnej, ... Zbadaj rząd aproksymacji (reszty).

3. Zaaproksymuj przez różnice dzielone na siatce kwadratowej operator różniczkowy
$$-\Delta u = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{\partial^2}{\partial y^2}u.$$

4. Na odcinku $[0,1]$ zaaproksymuj na siatce równomiernej równanie
$$-u''(x) = f(x)$$
z warunkami brzegowymi Dirichleta
$$u(0) = A, \quad u(1) = B.$$
Wypisz w postaci $Ax = b$ otrzymany układ równań algebraicznych liniowych. Udowodnij, że macierz A jest symetryczna i dodatnio określona.

5. Aproksymacja przestrzeni Banacha $(U, \|\cdot\|)$, to rodzina trójek
$$(*) \qquad \{U_h, r_h, p_h\}_{h\in\omega}$$
gdzie
   - $(U_h, \|\cdot\|_h)$ $h \in \omega$ - rodzina przestrzeni (skończonego wymiaru),
   - $r_h : U \to U_h$ - to operatory obcięcia,
   - $p_h : U_h \to U$ - to operatory przedłużenia.
   - Niech $u_h \in U_h$ dla każdego $h \in \omega$. Rodzina $\{u_h\}_{h\in\omega}$ jest **zbieżna dyskretnie** do $u \in U$, jeśli
$$\|r_h u - u_h\|_h \to 0, \quad \text{gdy} \quad h \to 0.$$

Tutaj $\omega \subset \mathbf{R}$ jest zbiorem indeksów $h \in \omega$. Zakłada się, że ω ma jedyny punkt skupienia 0. Aproksymacja $(*)$ jest **zbieżna** jeśli $\pi_h \to_s I$, gdzie $\pi_h = p_h r_h$, gdy $h \to 0$. Aproksymacja $(*)$ jest **stabilna**, jeśli operatory przedłużenia s wspólnie ograniczone.

Udowodnij, że jeśli aproksymacja przestrzeni jest zbieżna i stabilna, to zbieżność dyskretna rodziny $\{u_h\}_{h\in\omega}$ pociąga jej zbieżność w przestrzeni U, to znaczy $\|p_h u_h - u\| \to 0$, gdy $h \to 0$.

Niech $U = C([0,1])$ z norma "sup". Na przedziale $[0,1]$ budujemy siatkę $N+1$ punktów równoodległych i przyjmujemy $U_h = \mathbf{R^{N+1}}$ z norma "max". Określamy jako r_h "obcięcia" funkcji z U do zbioru punktów siatki, zaś jako p_h intepolację przy pomocy łamanej. (Jak wygląda zbiór ω?)

Sprawdź, że dla tego przykładu zachodzi udowodnione wyżej twierdzenie.

6. Na siatce kwadratowej na płaszczyźnie zaaproksymuj różnicowo

   (a) drugą pochodną mieszaną (zakładamy ciągłość drugich pochodnych mieszanych),

   (b) laplasjan.

   Aproksymować trzeba w punkcie **0**, zaś wolno używać tylko punktów **0, 1, 2, 3, 4**.

$$\begin{array}{ccc} 1 & * & 2 \\ * & 0 & *. \\ 3 & * & 4 \end{array}$$

7. Zaaproksymuj różnicowo na siatce kwadratowej $\Omega_h \cup \Gamma_h$, zbudowanej na obszarze $\Omega = [0,L] \times [0,L] \subset \mathbf{R^2}$ w ten sposób, że brzeg siatkowy Γ_h leży na $\partial\Omega$, równanie

$$-\Delta u(p) + b_1 u_x(p) + b_2 u_y(p) + cu(p) = f(p)$$

   (a) z warunkiem brzegowym Dirichleta,

   (b) z warunkiem brzegowym Robin

$$\alpha \frac{d}{dn} u(p) + \beta u(p) = \phi(p)$$

Użyj do aproksymacji pierwszych pochodnych

- różnic centralnych,
- różnic w przód,
- różnic w tył.

Zbadaj stabilność schematu w każdym z przypadków, używając jako kryterium **Twierdzenia 1** z wykładu 3.

8. Na siatce kwadratowej zbudowanej na kwadracie $[0, L] \times [0, L]$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & 1 \\ 2 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 2 \\ 3 & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

zaaproksymuj równanie $-\Delta u + cu = f$ z warunkiem brzegowym Dirichleta, używając schematu z otoczeniem siatkowym

$$N_h(p) = \begin{array}{ccc} & * & \\ * & p & * \\ & * & \end{array}.$$

Wypisz układ równań algebraicznych liniowych. Zwróć uwagę na strukturę macierzy układu.

9. Przenieś na siatkę warunek brzegowy Dirichleta, używając

   (a) ekstrapolacji liniowej:

$$\begin{array}{cccccc} . & . & & . & & . \\ \\ . & 1 & 0 & 2 & & . \\ \\ . & . & & . & & . \end{array}$$

(b) interpolacji liniowej

$$\begin{array}{ccccc}
. & . & & . & . \\
. & 1 & 2 & 0 & . \\
. & . & & . & .
\end{array}$$

Punkty oznaczone 1 i 2 leża na siatce, zaś punkt oznaczony 0 leży na prawdziwym brzegu. Aproksymujemy zagadnienie brzegowe

$$-\Delta u(p) + cu(p) = f(p), \quad c \geq 0, \quad p \in \Omega,$$

$$u(p) = \phi(p), \quad p \in \partial\Omega,$$

(zakładamy, że ma ono rozwiązanie co najmniej klasy $\mathbf{C^2}$!) przy pomocy schematu z otoczeniem siatkowym

$$N_h(p) = \begin{array}{ccc} & * & \\ * & * & * \\ & * & \end{array},$$

dla $\Omega \subset \mathbf{R^2}$, na siatce o stałym kroku h w obu kierunkach. Zakładamy także, że uzyskuje się w ten sposób schemat rzędu 2.

Wyciągnij stad wnioski dotyczące błędu inter(extra)polacji: Użyj wielomianu interpolacyjnego i wzorów na oszacowania błędu interpolacji.

Porównaj wyniki z punktu widzenia stosowalności różnych kryteriów stabilności.

10. Dla zagadnienia

$$-\Delta u(p) + cu(p) = f(p), \quad c > 0, \quad p \in \Omega,$$

postawionego na kwadracie $\Omega \subset \mathbf{R^2}$ o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, z *warunkiem brzegowym Neumanna*

$$\frac{d}{dn}u(p) = \phi(p), \quad p \in \partial\Omega$$ [11]

[11] $\frac{d}{dn}$ oznacza tutaj operator pochodnej normalnej do brzegu, skierowanej na zewnatrz obszaru Ω.

zbudowano schemat różnicowy na siatce ze stałym krokiem h w obu kierunkach, oparty na takim samym otoczeniu siatkowym dla punktów wewnętrznych jak w poprzednim zadaniu. Niech brzeg siatki będzie zawarty w brzegu obszaru Ω.

Zakładając, że równanie różniczkowe jest spełnione także na brzegu $\partial\Omega$, zbuduj aproksymację warunku brzegowego rzędu przynajmniej 2.

11. Zastosuj kryterium stabilności sformułowane we wnioskach z **Twierdzenia 2** z **Wykładu 3** do zbadania stabilności schematu

$$-[\frac{(\nabla\Delta)_x + (\nabla\Delta)_y}{h^2}]u_{k,l} + [\frac{(\Delta+\nabla)_x}{2h}]u_{k,l} +$$

$$+[\frac{(\Delta+\nabla)_y}{2h}]u_{k,l} + cu_{k,l} = f_{k,l} \quad c \geq 0,$$

dla punktów wewnętrznych obszaru siatkowego Ω_h, z warunkami Dirichleta na brzegu obszaru Γ_h. Jako obszar przyjmij kwadrat na płaszczyźnie, którego boki są równoległe do osi układu współrzędnych, oraz zbuduj siatkę o stałym kroku h w obu kierunkach, której brzeg leży na brzegu obszaru.

12. (a) Dane jest zagadnienie brzegowe

$$-u^{''}(t) + cu(t) = f(t), \quad c \geq 0, \quad t \in (a,b),$$

$$u(a) = u(b) = 0,$$

Zakładając, że istnieje rozwiązanie klasyczne u, udowodnij, że spełnia ono następujące oszacowanie

$$\|u\| \leq M\|f\|_0,$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza każda z (semi)norm $|\cdot|_1$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_0$, zaś M jest stała. Zastanów się co oznacza to oszacowanie.

(b) Zagadnienie z punktu (a) zaaproksymowano różnicowo na siatce

$$t_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \cdots, N+1, \quad h = \frac{b-a}{N+1}$$

i otrzymano schemat

$$-\frac{\nabla\Delta u_k}{h^2} + cu_k = f_k, \quad k = 1, 2\cdots, N,$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

Udowodnij, że schemat jest stabilny zarówno w normie $\|\cdot\|_0$, jak i w normie $\|\cdot\|_1$. Zastanów się nad dobrymi i złymi stronami aproksymacji w każdej z rozważanych norm.

13. Dany jest układ równań algebraicznych liniowych

$$Ax = d$$

o macierzy symetrycznej i dodatnio określonej. Proces iteracyjny Richardsona jest określony w następujący sposób

$$x_0 - \text{dowolny}, \quad x_{k+1} = x_k + \kappa r_k,$$

gdzie $r_k = d - Ax_k$ jest tak zwanym reziduum na k-tym kroku, zaś κ to współczynnik relaksacji, który dobieramy tak, aby uzyskać jak najlepszą zbieżność procesu.

(a) Wyraź przy pomocy własności widma macierzy $C = I - \kappa A$ warunek konieczny i dostateczny zbieżności do zera ciągu macierzy C^k, gdy $k \to \infty$. Zastosuj uzyskany wynik dla określenia warunków zbieżnośći procesu Richardsona.

(b) zakładając, że widmo macierzy A jest uporządkowane jak niżej

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$$

wyznacz taka wartość κ przy której zbieżność procesu Richardsona jest najszybsza.

(c) Dla optymalnej wartości κ wyraź współczynnik zbieżności procesu Richardsona poprzez **współczynnik uwarunkowania macierzy** A.

14. Do iteracji Richardsona dla układu $Ax = d$ wprowadź **preconditing** w następujący sposób: niech $M = M^T > 0$ i niech macierz M będzie bliska macierzy A. Oznaczmy przez C pierwiastek z M: $M = CC$. Ponadto załóżmy, że potrafimy łatwo rozwiązać układ $Mz = r$. Utwórzmy nowy układ $C^{-1}AC^{-1}y = C^{-1}d$, który oznaczymy $\tilde{A}y = \tilde{d}$.

(a) Zastanów się, dlaczego ten nowy układ może mieć mniejszy współczynnik uwarunkowania niż układ oryginalny.

(b) Zauważ, że $x = C^{-1}y$.

(c) Zbuduj proces Richardsona dla nowego układu oznaczając kolejne wektory procesu przez y_k, zaś rezidua przez s_k.

(d) Wzorując się na zależności między x i y utwórz nowe wektory x_k i nowe rezidua z nimi związane r_k, wykorzystujące macierz A, macierz M i wektor d. Stanowczo pozbądź się macierzy C^{-1}! W trakcie procesu dopuszczamy rozwiązywanie układu równań z macierzą M.

15. Rozłóżmy macierz A:
$$A = L + D + U,$$
gdzie L, D, U, to odpowiednio część pod diagonalą, diagonala i część nad diagonalą.

(a) Iteracja Jacobiego:
$$Lx_k + Dx_{k+1} + Ux_k = d.$$
Udowodnij, że jeśli
$$\exists_\rho \quad 0 \le \rho < 1 \quad \forall_i \quad \frac{\sum_{i\neq j} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < \rho,$$
to iteracja Jacobiego jest zbieżna do rozwiązania układu.

(b) Gauss-Seidel:
$$(L + D)x_{k+1} + Ux_k = d.$$
Wykorzystując **Twierdzenie o Postaci Kanonicznej** (patrz niżej), udowodnij, że iteracja Gaussa -Seidel'a zbiega, gdy
$$A = A^T > 0.$$

(c) Proces iteracyjny dwupoziomowy dla układu $Ax = d$ jest w **postaci kanonicznej**, gdy
$$B\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + Ax_k = d.$$

tutaj B jest macierzą odwracalna, zaś $\tau > 0$, to współczynnik relaksacji. Zauważ, że proces ten może zawierać w sobie **preconditing**. Zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie o Postaci Kanonicznej. *Jeśli*

- $A = A^T > 0$
- $B - \frac{\tau}{2}A > 0$

to proces jest zbieżny w normie energetycznej:

$$\|x - x_k\|_A \to 0.$$

Udowodnij Twierdzenie o Postaci Kanonicznej.

(d) Zbadaj zbieżność procesu *pod - nad relaksacji*:

$$(D + \omega L)x_{k+1} = [(1-\omega)D - U\omega]x_n + \omega d.$$

Tutaj $Ax = d$, $A = A^T > 0$, zaś ω, to parametr dodatni. Gdy $\omega < 1$, proces nazywa się *pod-relaksacja*, gdy $\omega > 1$ *nad-relaksacja*. Dla $\omega = 1$, to proces Gaussa-Seidel'a.

16. Niech $u \in C^1(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbf{R^d}$ jest obszarem o brzegu dostatecznie regularnym.

(a) Znajdź $div \nabla u$.

(b) Niech $v \in C^1(\Omega)$ i niech $\underline{w} \in [C^1(\Omega)]^d$. Udowodnij, że

$$\int_\Omega v div(\underline{w}) d\Omega = \int_\Omega div(v\underline{w}) d\Omega - \int_\Omega \nabla v \underline{w} d\Omega.$$

Zastosuj

Twierdzenie Gaussa. *Niech* $\underline{u} \in [C^1(\Omega)]^d$. *Wtedy*

$$\int_\Omega div(\underline{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{u}\ \underline{n} dS,$$

gdzie $\underline{n}$ *jest wersorem normalnym do brzegu* $\partial\Omega$*, skierowanym na zewnątrz obszaru.*

---

aby otrzymać *wzór na całkowanie przez części*

$$-\int_\Omega v \Delta u d\Omega = -\int_{\partial\Omega} v \frac{d}{d\underline{n}} u dS + \int_\Omega \nabla v \nabla u d\Omega.$$

(c) Zastosuj uzyskany wzór do utworzenia *sformułowania uogólnionego* dla równania:

$$-\Delta u(p) + cu(p) = f(p), \quad p \in \Omega$$

z warunkiem jednorodnym Dirichleta, oraz z warunkiem (niejednorodnym) Neumanna. Pamiętaj o **Twierdzeniu o Śladzie!**.

(d) Powtórz to samo dla równania typu eliptycznego

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}]u + cu = f,$$

z warunkiem Dirichleta jednorodnym.

(e) Wyprowadź odpowiednik "naturalnego" warunku Neumanna w tym przypadku.

17. Niech

$$a : V \times V \to \mathbf{R}$$

będzie formą dwuliniową ciągłą, koercywną i symetryczną, zaś

$$l : V \to \mathbf{R}$$

formą liniową ciągłą nad przestrzenią Hilberta V.

Określimy funkcjonał

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - lv.$$

(a) Udowodnij, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

jest

$$a(u,v) = lv, \quad \forall v \in V.$$

(b) Udowodnij, że J osiąga zawsze jedyne minimum globalne w V.

18. Niech $K \subset V$ będzie zbiorem wypukłym i domkniętym w przestrzeni Hilberta V, $a : V \times V \to \mathbf{R}$ formą dwuliniową ciągłą, symetryczną, i koercywną nad V, $l : V \to \mathbf{R}$ formą liniową ciągłą nad V. Udowodnij następującą wersję Twierdzenia Lax'a - Milgrama:

    Twierdzenie. *W K istnieje jedyny punkt u, w którym funkcjonał J osiąga minimum.*

    Wskazówka. Udowodnij najpierw, że funkcjonał J jest ograniczony z dołu na zbiorze K przez liczbę $-\frac{\|l\|}{2\gamma}$, gdzie γ, to stała koercywności. Następnie określ ciąg elementów

    $$v_k \in K, \quad J(v_k) = c_k \in \mathbf{R},$$

    gdzie c_k jest ciągiem minimalizującym, to jest dążącym do kresu dolnego funkcjonału J. Udowodnij, że każdy taki ciąg $\{v_k\}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

19. Przy założeniach poprzedniego zadania, udowodnij, że $u \in K$ jest punktem w którym funkcjonał J osiąga minimum wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia on następującą **nierówność wariacyjną**

    $$a(u, v - u) \geq l(v - u) \quad \forall v \in K.$$

    Wskazówka.

    - Zauważ, że a(u,v) jest iloczynem skalarnym w przestrzeni Hilberta V.
    - Zauważ, że norma w V i norma wprowadzona przez formę a są równoważne.
    - Wyraź funkcjonał l poprzez nowy iloczyn skalarny (Twierdzenie Riesza!).
    - Zauważ, że minimalizacja funkcjonału J na K, to to samo co znalezienie w K elementu najlepszej aproksymacji, w sensie nowej normy, dla znalezionej reprezentacji Riesza funkcjonału l.
    - Znajdź warunek geometryczny, (analogiczny do takiego warunku dla rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń) dla rzutu ortogonalnego na zbiór K.

20. Zbadaj elementy: $\{T, \mathcal{P}_T, \Sigma_T\}$, $V = H^1(\Omega)$, $\Omega \in \mathbf{R}^2$. Wyznacz bazy dualne, zbadaj konforemność, zbuduj bazy w przestrzeni elementu skończonego.

(a) T - trójkąt o wierzchołkach p_0, p_1, p_2; $\mathcal{P}_T$-wielomiany dwóch zmiennych, stopnia ≤ 1; Σ_T: $\phi_j(P) = P(p_j)$ $j = 0, 1, 2$.

(b) T - trójkąt; p_j $j = 0, 1, 2$, środki boków, $\mathcal{P}_T$ - jak wyżej Σ_T - jak wyżej.

(c) T kwadrat o wierzchołkach p_j $j = 0, 1, 2, 3$; $\mathcal{P}_T$: wielomiany dwóch zmiennych stopnia nie większego niż 2; Σ_T: jak wyżej (cztery elementy).

21. Dla funkcji $f(x) = |x|$ znajdź przynajmniej dwie pochodne dystrybucyjne.

22. Do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych

$$Ax = d$$

o macierzy A symetrycznej i dodatnio określonej zastosowano **Metodę Gradientów Sprzężonych** - w skrócie **CG**. Metoda iteracyjna **CG** polega na minimalizacji funkcjonału

$$J(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T d$$

na każdym kroku iteracji. Minimalizacji dokonujemy zawsze w przestrzeni wymiaru 1.

Warto sobie zapamiętać, że metoda **CG** charakteryzuje się znacznie lepszym współczynnikiem zbieżności niż metody iteracyjne dotychczas omówione. Wiemy na przykład, że dla iteracji Richardsona współczynnik zbieżności wynosi

$$q = \frac{\mathrm{cond(A)} - 1}{\mathrm{cond(A)} + 1}.$$

Dla metody **CG** mamy

$$q = \frac{\sqrt{\mathrm{cond(A)}} - 1}{\sqrt{\mathrm{cond(A)}} + 1}.$$

Przy bardzo dużych wartościach $\mathrm{cond}(A)$ pojawienie się pierwiastka ma duże znaczenie!

(a) Iterację zaczynamy od dowolnego punktu x_0. Wybieramy wektor

$$p_0 = r_0 = d - Ax_0.$$

(b) Jeśli już określiliśmy x_k i p_k, to wybieramy

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

gdzie α_k jest tak dobrane, że

$$J(x_k + \alpha_k p_k) = \min_{\alpha \in R} J(x_k + \alpha p_k).$$

Kolejny wektor p_{k+1} określamy przy pomocy warunków

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k,$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k,$$

gdzie $p_k^T A p_{k+1} = 0$.

Należy:

- wyliczyć współczynniki α_k i β_k,
- pokazać, że prawdziwe są także takie (numerycznie dogodniejsze) wzory
$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad \beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}.$$
- pokazać, że na każdym kroku iteracji minimalizuje się
$$\|x - x_k\|_A,$$
- pokazać, że algorytm znajduje dokładne rozwiązanie układu po n krokach, gdzie n jest wymiarem zadania.

23. **Bardzo proste zagadnienia ewolucyjne.** Zajmiemy się najpierw zagadnieniem Cauchy'ego dla bardzo prostego równania hiperbolicznego pierwszego rzędu.

$$u_t + \mu u_x = 0, \quad u(0,x) = \phi(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

gdzie μ jest stała.

(a) Udowodnij, że jeśli $\phi \in C^1$, to rozwiązaniem jest

$$u(t,x) = \phi(x - \mu t).$$

Zinterpretuj ten wynik jako przemieszczającą się falę.

(b) **Metoda Fouriera badania stabilności schematów różnicowych** polega na tym, że poszukujemy rozwiązania schematu różnicowego w postaci

$$u_k^n = \gamma^n e^{i\alpha k}$$

gdzie α jest dowolna liczba rzeczywista, $u_k^n \approx u(kh, n\tau)$, $h > 0$ to krok "przestrzenny", zaś $\tau > 0$ to krok "czasowy". Po wstawieniu tego wyrażenia do schematu, wyliczamy γ w zależności od α. Jeśli z tego związku wynika, że

$$|\gamma(\alpha)| \leq 1 \; \forall \; \alpha \in \mathbf{R},$$

to schemat jest stabilny w pewnej normie dyskretnej (patrz także dalsze zadania).

Zbadaj stabilność następujących schematów różnicowych i zinterpretuj ich położenie na siatce, zbadaj ich rząd:

i. **Schematy Upwind.**

$$u_k^{n+1} - u_k^n = \lambda\mu[u_k^n - u_{k-1}^n],$$

gdzie $\lambda = \frac{\tau}{h}$, zaś $\tau > 0$ to krok "czasowy", a $h > 0$ to krok "przestrzenny". Wielkość $\lambda > 0$ należy traktować jako stała. Trzeba zauważyć, że stabilność schematu zależy zarówno od znaku μ (dla jakich μ ten schemat jest dobry?), jak i od wartości λ. Znajdź warunek jaki powinna spełniać stała λ. Zinterpretuj ten fakt z punktu widzenia postaci siatki. Skonstruuj schemat dobry dla dla μ o przeciwnym znaku. Jeśli stabilność schematu zależy od wartości λ, to taki schemat nazywa się **warunkowo stabilny.**

ii. **"Pozornie" lepszy schemat.**

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{\lambda}{2}\mu[u_{k+1}^n - u_{k-1}^n].$$

iii. **Schemat Laxa - Friedrichsa.**

$$u_k^{n+1} = \frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2} + \frac{\lambda}{2}\mu[u_{k+1}^n - u_{k-1}^n].$$

iv. **Równanie typu parabolicznego.**

$$u_t = a u_{xx}, \quad a > 0, \quad 0 \le x \le L, \quad 0 \le t,$$

warunek początkowy

$$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in [0,L], \quad L > 0,$$

warunki brzegowe

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad u(t,L) = \psi_2(t).$$

Przy pomocy metody Fouriera zbadaj stabilność schematu z parametrem $0 \le \sigma \le 1$

$$\begin{gathered} u_k^{n+1} = \\ = u_k^n + \lambda a[\sigma(u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n) + \\ +(1-\sigma)(u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1})], \\ \lambda = \frac{\tau}{h^2}. \end{gathered}$$

Schemat dla $\sigma = 0$ jest otwarty. Trzeba zauważyć, że dla pewnych wartości σ (dla jakich?) schemat jest warunkowo stabilny, dla innych jest stabilny bezwarunkowo. Zauważ jaka jest stabilność schematu otwartego. Zauważ, że schemat zamknięty wymaga rozwiązania na każdym kroku czasowym układu równań algebraicznych liniowych. Wypisz ten układ. Zastanów się jak możnaby go rozwiązywać numerycznie. Zbadaj rząd schematu w zależności od σ. (Uwaga na punkt $\sigma = \frac{1}{2}$!) Wyciagnij wnioski co do budowy siatki, w przypadku gdy schemat jest tylko warunkowo stabilny.

(c) **Inna, bardziej uniwersalna metoda badania stabilności schematów 2-poziomowych.** Schemat dwupoziomowy jest w postaci kanonocznej, jeśli

$$B\frac{\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n}{\tau} + A\underline{u}^n = \underline{f}^n,$$

gdzie $\underline{u}^n$ oznacza całe rozwiązanie schematu na n-tym poziomie czasowym, A i B są macierzami odpowiedniego wymiaru, $\underline{f}$ jest wektorem. Zakłada się, że $A = A^T > 0$.

Można udowodnić, że schemat jest stabilny (w normie mieszanej: L_h^2 dla zmiennych przestrzennych, max dla zmiennej t), jeśli

$$\exists\ \epsilon \in (0,1] \ \text{ że }\ B \geq I\epsilon + \frac{\tau}{2}A.$$

Zbadaj stabilność schematu z zadania 23(b)iv. przy pomocy tego kryterium. Zastosuj tę sama metodę w przypadku, gdy współczynnik $a = a(x) > 0$ (zależy od x).

24. **DFT - Dyskretna Transformata Fouriera.** Niech

$$\underline{u} = \{u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}\}$$

będzie ciągiem liczbowym. Ciąg ten przedłużamy "w obie strony" w sposób periodyczny, to znaczy tak, że dla dowolnego s całkowitego $u_k = u_{k+sN}$.

DFT ciągu $\underline{u}$, to ciąg

$$\mathcal{F}\underline{u} = \hat{\underline{u}} = \{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_{N-1}\},$$

gdzie

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi kj}{N}} u_j \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

Odwrotna DFT (IDFT) ciągu $\underline{u}$, to ciąg

$$\check{\underline{u}} = \{\check{u}_0, \check{u}_1, \cdots, \check{u}_{N-1}\}$$

gdzie

$$\check{u}_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi jk}{N}} u_j, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

(a) **Odwrotność.** Udowodnij, że $\mathcal{F}^{-1}\underline{u} = \check{\underline{u}}$.

(b) **Przesunięcie.** Niech

$$\underline{u}_{\cdot+p} = \{u_p, u_{1+p}, u_{2+p}, \cdots, u_{N-1+p}\},$$

gdzie p jest liczba całkowita. Udowodnij, że

$$(\hat{\underline{u}_{\cdot+p}}) = \underline{v} = \{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\},$$

gdzie

$$v_k = e^{i\frac{2\pi}{N}kp}\hat{u}_k.$$

(c) **Norma.** Niech

$$\|\underline{u}\|_{0,h}^2 = h\sum_{j=0}^{N-1}|u_j|^2.$$

Udowodnij, że

$$\|\hat{\underline{u}}\|_{0,h} = \frac{1}{\sqrt{N}}\|\underline{u}\|_{0,h}.$$

(d) Dla schematu różnicowego dwupoziomowego, otwartego postaci

$$u_k^{n+1} = \sum_{j=-r}^{r} a_j u_{k+j}^n,$$

z warunkiem początkowym

$$u_k^0 = \phi_k \quad k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$$

periodycznym o okresie N, znajdź DFT.

(e) Udowodnij, że dla każdego $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\hat{u}_k^n = (\gamma_k)^n \hat{u}_k^0,$$

gdzie γ_k jest pewna liczba zespolona zależna od k.

(f) Wypisz postać γ_k jako funkcji k.

(g) Wyraź $\underline{u}^n$ poprzez $\hat{\underline{u}}^0$.

(h) Na podstawie przeprowadzonych rozważań w poprzednich punktach zadania, uzasadnij, dlaczego w Metodzie Fouriera badania stabilności schematów różnicowych omawianego typu, poszukujemy rozwiązania schematu w formie

$$u_k^n = \gamma(\alpha)^n e^{i\alpha k} \ \ \forall\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

(i) Udowodnij, że warunek $|\gamma(\alpha)| \leq 1$ pociąga stabilność schematu rozważanej wyżej postaci w normie

$$\|\underline{u}\| = \max_{0\leq n}\|\underline{u}^n\|_{0,h}.$$

LITERATURA

Podstawowe źródła, na których opiera się ten tekst to:

1. Dietrich Braess **"Finite Elements"** Second edition, Cambridge University Press, 2001

2. Maksymilian Dryja, Janina i Michał Jankowscy **"Przegląd Metod i Algorytmów Numerycznych"** Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 1982

3. Kôsaku Yosida **"Functional Analysis"** Springer – Verlag, 1966