EGZAMIN PISEMNY Z NRRCZ 4 CZERWCA 2003

1. Dla zagadnienia brzegowego z **małym** parametrem $\epsilon > 0$
$$-\epsilon u_{xx}(x) + pu_x(x) + qu(x) = f(x), \quad x \in (a,b),$$
$$u(a) = u(b) = 0,$$
gdzie p i q - stałe, $q > 0$, zastosowano schemat różnicowy
$$-\epsilon \frac{\Delta\nabla}{h^2} u_k + p\frac{\Delta + \nabla}{2h} u_k + qu_k = f_k$$
na siatce o stałym kroku $h > 0$, pokrywającej przedział domknięty $[a,b]$. Tutaj Δ - to różnica " w przód", zaś ∇ -różnica "w tył".
   (a) **Na podstawie poznanych kryteriów zbadaj stabilność tego schematu w normie "max" w zależności od ϵ.**
   (b) **Załóż, że ϵ jest funkcją h, $\epsilon = \epsilon(h)$. Odpowiedz jakie warunki powinna spełniać funkcja $\epsilon(h)$, aby schemat był stabilny. Zbadaj przypadki $\epsilon(h) = h^2$, $\epsilon(h) = h$, $\epsilon(h) = \sqrt{h}$.**

2. Niech $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad F \in C^1(\mathbf{R})$. Rozważamy zagadnienie Cauchy'ego
$$u_t(t,x) + F(u(t,x))_x = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad u(0,x) = u^0(x).$$
Zakładamy, że zagadnienie ma rozwiązanie należące do $L^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$.

   Dla tego zagadnienia zaproponuj sformułowanie uogólnione, oparte na równaniu wariacyjnym, które dopuszcza rozwiązania nieróżniczkowalne w sensie klasycznym. (Uwaga na warunek początkowy!)

3. Rozważamy zagadnienie początkowo - brzegowe

(1) $$u_t(t,x) + \mu u_x(t,x) = 0, \quad \mu \text{ - stała},$$

(2) $$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^+,$$

(3) $$u(t,0) = \psi(t), \quad t > 0.$$

   Na obszarze $\Omega = \{(t,x) | t \geq 0, x \geq 0\}$ założono siatkę prostokątną punktów (t^n, x_k), gdzie $t^n = n\tau$, $x_k = kh$, $\tau > 0$, $\quad h > 0$. Niech Q będzie prostokątem o wierzchołkach (t^n, x_k), (t^n, x_{k+1}), (t^{n+1}, x_k), (t^{n+1}, x_{k+1}).

(a) **Zbuduj schemat rożnicowy (tzw. "BOX") całkując stronami równanie (1) na Q i następnie zastępując** *pozostające* **całki jednowymiarowe kwadraturą numeryczną trapezów** (pole pod krzywą zastępujemy polem trapezu). **Przyjmujemy, że $\frac{\tau}{h} = \lambda$ jest stałe.**

(b) **Opisz sposób posługiwania się tym schematem przy rozwiązywaniu zadania (1) (2) (3).**

(c) **Zbadaj stabilność schematu "BOX" ze względu na warunek początkowy. (Bierzemy teraz pod uwagę tylko (1) i (2); możemy założyć, że warunek początkowy ϕ jest dany na R).**

4. Niech będą dane dwa ciągi periodyczne o okresie N

$$\underline{u} = \{u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}\}, \quad \underline{v} = \{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}.$$

Splot $\underline{\mathbf{u}}$ i $\underline{\mathbf{v}}$, to ciąg $\underline{\mathbf{u}} \star \underline{\mathbf{v}} = \{s_0, s_1, \cdots, s_{N-1}\}$, gdzie

$$s_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j v_{k-j}.$$

(a) **Udowodnij, że $\underline{\mathbf{u}} \star \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} \star \underline{\mathbf{u}}$,**

(b) **Znajdź $(\underline{\mathbf{u}} \hat{\star} \underline{\mathbf{v}})$,**

(c) **Niech $\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \{u_0 v_0, u_1 v_1, \cdots, u_{N-1} v_{N-1}\}$. Znajdź $(\underline{\mathbf{u}} \hat{\cdot} \underline{\mathbf{v}})$.**

(d) Niech będzie dany schemat ze zmiennym współczynnikiem

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \lambda a_k (u_k^n - u_{k-1}^n), \quad \lambda = \frac{\tau}{h}.$$

Wyraź $\hat{u}_k^{n+1}$ przy pomocy $\hat{u}_k^n$.

Punktacja: 1a:3, 1b:2; 2:5; 3a:2, 3b:1, 3c:2; 4a:1, 4b:1, 4c:1, 4d:2.

Stopnie: $< 10 : 2; \quad 10 - 13 : 3; \quad 14 - 17 : 4; \quad 18 - 20 : 5.$
