# Modelowanie i konstrukcja rekonfigurowalnych systemów wieloagentowych

**Barbara Dunin-Kęplicz**

Instytut Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego
Instytut Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk

## Agenci i systemy wieloagentowe

**Agent** to system informatyczny (np. program lub robot) *usytuowany* w środowisku, zdolny do podejmowania *autonomicznych decyzji* oraz do realizacji akcji w sposób *elastyczny*, często w rygorze czasu rzeczywistego.

Elastyczność jego działania manifestuje się w

- reaktywności
- pro-aktywności
- zachowaniach pro-spolecznych.

Agenci są wykorzystywani w środowiskach, w których muszą wchodzić w (zlożone!) *interakcje*, współpracować z agentami lub ludźmi, którzy mogą mieć wiele, potencjalnie sprzecznych, celów.

Ewentualna mnogość i sprzeczność celów nie zwalnia z konieczności podejmowania decyzji i wykonywania akcji.

Takie środowiska to **systemy wieloagentowe** (ang. *multiagent systems: MAS*).

## Systemy BDI (ang. Beliefs, Desires, Intentions Systems)

Implementują paradygmat *praktycznego wnioskowania*: decydowania krok po kroku, jaka akcja przybliża osiągnięcie żądanego celu. (Bratman)

Stany agentów BDI zdefiniowano w kategoriach

- *przekonań* (ang. *beliefs*): modelujących wiedzę agenta o środowisku
- *celów* (ang. *desires*): modelujących opcje dostępne dla agenta
- *intencji* (ang. *intentions*): modelujących opcje wybrane przez agenta

Proces decyzyjny = interakcja postaw motywacyjnych i informacyjnych: konstrukcja *zobowiązań* prowadzących do realizacji akcji.

Modelowanie współpracy agentów (robotów): uproszczone naśladowanie trybu współpracy zespołów lub organizacji ludzkich.

## Kooperatywne rozwiązywanie problemów

**ang. Cooperative Problem Solving: CPS**

**Pierwsze zadanie badawcze**:
model agenta jako *indywidualnej, autonomicznej* jednostki.

**Zadanie perspektywiczne**:
organizacja *współpracy* agentów w sposób umożliwiający osiągnięcie złożonego celu, przy jednoczesnym zachowaniu autonomii agentów.

W **CPS**: postawy *indywidualne*, *bilateralne* i *kolektywne*.

**Grupa** jako całość musi działać w spójny, zaplanowany sposób, prezentując jednolitą **kolektywną** postawę motywacyjną.

*Opracowanie metod modelowania (kolektywnych) postaw motywacyjnych w dynamicznym środowisku, wymagającym dużych możliwości adaptacyjnych, jest przedmiotem badań niniejszej rozprawy*.

## Główne wyniki rozprawy

**Metodologia kooperatywnego rozwiązywania problemów** w systemach wieloagentowych typu BDI, w oparciu o *kompletną teorię formalną*:

1. statyczną, deskryptywną teorię kolektywnych postaw motywacyjnych
   - definicje wszystkich pojęć wchodzących w zakres tej teorii
   - charakterystyka ich interakcji

2. dynamiczny model ich ewolucji w niedeterministycznym środowisku
   - abstrakcyjny algorytm rekonfiguracji
   - dowód poprawności algorytmu przy zachowaniu więzów wyrażonych przez aksjomaty statycznej części teorii

Statyczna i dynamiczna część teorii wyraża najistotniejsze aspekty CPS, pozostawiając miejsce na specyficzne, kontekstowo-zależne rozszerzenia.

Obie części teorii tworzą zbiór *aksjomatów CPS*: **wysokopoziomową specyfikację** poprawnego i kompletnego systemu BDI.

Skonstruowano **cztery** systemy komputerowe wykorzystujące teorię CPS.

**Zasadnicza decyzja**:

wybór *logiki wielomodalnej* zawierającej elementy

- *logik intencjonalnych* — dla postaw motywacyjnych
- *logiki dynamicznej* — dla warunków wstępnych akcji i ich efektów
- *logiki wiedzy* — dla postaw informacyjnych

Interesuje nas bardziej problem *wyrażalności* subtelnych, trudno poddających się formalizacji aspektów CPS, niż własności tych logik.

## Modalne operatory dla przekonań

**Świadomość** agenta (grupy) to stan przekonań agenta (grupy) o sobie, o innych agentach i o stanie środowiska.

*Indywidualne przekonanie* $\mathsf{BEL}(i, \varphi)$: agent $i$ wierzy, że $\varphi$
*Przekonanie w grupie* $\mathsf{E\text{-}BEL}_G(\varphi)$: każdy w grupie $G$ wierzy, że $\varphi$
*Wspólne przekonanie* $\mathsf{C\text{-}BEL}_G(\varphi)$: każdy w $G$ wierzy, że $\varphi$, każdy w $G$ wierzy, że każdy w $G$ wierzy, że $\varphi$, itd.

$KD45_n^C$ jest modalnym systemem $KD45_n$ plus: (Fagin, Halpern, Moses, Vardi)

$\mathsf{E\text{-}BEL}_G(\varphi) \leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} \mathsf{BEL}(i, \varphi)$

$\mathsf{C\text{-}BEL}_G(\varphi) \rightarrow \mathsf{E\text{-}BEL}_G(\varphi \wedge \mathsf{C\text{-}BEL}_G(\varphi))$

Z $\varphi \rightarrow \mathsf{E\text{-}BEL}_G(\psi \wedge \varphi)$ wnioskuj, iż $\varphi \rightarrow \mathsf{C\text{-}BEL}_G(\psi)$ (reguła indukcji).

**Różne poziomy świadomości w grupie**
$\mathsf{BEL}(\psi)$, $\mathsf{E\text{-}BEL}_G(\psi)$, $\mathsf{E\text{-}BEL}_G^2(\psi)$, ..., $\mathsf{C\text{-}BEL}_G(\psi)$

## Kolektywna intencja: postulaty

Kluczową rolą *intencji* jest *konsolidacja ściśle współpracującej* grupy.

Pierwsza faza badań: pełne i poprawne systemy logiczne modelujące wzajemną intencję M-INT$_G$, a następnie kolektywną intencję C-INT$_G$.

Warunki dla kolektywnej intencji C-INT$_G(\varphi)$: ($\varphi$ = główny cel systemu)

- wszyscy członkowie grupy mają *indywidualne intencje* względem $\varphi$
- wszyscy członkowie grupy mają *indywidualną intencje*, aby pozostali mieli *indywidualne intencje* względem $\varphi$, itd. (aby wykluczyć wypadki współzawodnictwa: *wzajemna intencja* M-INT$_G(\varphi)$
- *wspólne przekonanie*, że zachodzi *wzajemna intencja* M-INT$_G(\varphi)$

## Kolektywna intencja: aksjomaty

$\mathsf{INT}(i, \varphi)$: agent $i$ ma indywidualną intencję, że $\varphi$

$\mathsf{E\text{-}INT}_G(\varphi)$: każdy agent w $G$ ma intencję, że $\varphi$

$KD_n^{\mathsf{M\text{-}INT}_G}$ to system modalny $KD_n$ plus:

$\mathsf{E\text{-}INT}_G(\varphi) \leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} \mathsf{INT}(i, \varphi)$

**Wzajemna intencja:**

$\mathsf{M\text{-}INT}_G(\varphi) \leftrightarrow \mathsf{E\text{-}INT}_G(\varphi \wedge \mathsf{M\text{-}INT}_G(\varphi))$

Z $\varphi \to \mathsf{E\text{-}INT}_G(\psi \wedge \varphi)$ wnioskuj $\varphi \to \mathsf{M\text{-}INT}_G(\psi)$ (reguła indukcji).

**Kolektywna intencja:**

$$\mathsf{C\text{-}INT}_G(\varphi) \leftrightarrow \mathsf{M\text{-}INT}_G(\varphi) \wedge \mathsf{C\text{-}BEL}_G(\mathsf{M\text{-}INT}_G(\varphi))$$

Wcześniejsze próby zdefiniowania kolektywnej intencji były nieskuteczne.

## Kolektywne zobowiązanie

- ma pragmatyczny charakter: oparte na *planie* realizacji celu
- prowadzi do *zespołowej akcji*,
  tj. do skoordynowanego wykonania indywidualnych akcji

*Ogólny schemat kolektywnego zobowiązania* pozwala budować kontekstowo-zależne definicje zobowiązań

- o różnej sile ekspresji
- stosowalne w rożnych strukturach organizacyjnych (instytucjach)

Słabsze definicje zobowiązań: osłabianie formy świadomości w grupie prowadzi do *grupowego* lub *rozproszonego* zobowiązania.

Metoda: sterowanie *pokrętłami* (parametrami) świadomości.

"Ukrycie" struktury grupy w strukturze bilateralnych zobowiązań prowadzi do ogólnego i łatwo modyfikowalnego rozwiązania.

## Schemat kolektywnego zobowiązania

$$\text{C-COMM}_{G,P}(\varphi) \leftrightarrow$$
$$\text{M-INT}_G(\varphi) \;\wedge\; \{awareness_G(\text{M-INT}_G(\varphi))\} \wedge$$
$$constitute(\varphi, P) \;\wedge\; \{awareness_G(constitute(\varphi, P))\} \wedge$$
$$\bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G} \text{COMM}(i,j,\alpha) \;\wedge\; \{awareness_G(\bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G} \text{COMM}(i,j,\alpha))\}$$

*Kalibrowanie* kolektywnych zobowiązań: instancje powyższego schematu
=
dobieranie wartości pokręteł $awareness_G$

- od $\emptyset$
- poprzez indywidualne przekonania $BEL$ oraz różne $\text{E-BEL}_G^k$
- po $\text{C-BEL}_G$

Uogólnienie naszych definicji prezentowanych od 1996.

## Różne aspekty świadomości

1. wzajemna intencja M-INT$_G$: *kolektywna świadomość* grupy C-BEL$_G$(M-INT$_G(\varphi)$)

2. poprawność planu względem $\varphi$: *kolektywna świadomość*, że C-BEL$_G(constitute(\varphi, P))$

3. Struktura grupy ukryta w strukturze bilateralnych zobowiązań:

   (a) kolektywna świadomość **de re**, tzn. *szczegółowa* świadomość każdego bilateralnego zobowiązania: $\bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G}$ C-BEL$_G$(COMM$(i, j, \alpha)$)

   (b) kolektywna świadomość **de dicto**, tzn. *globalna* świadomość istnienia bilateralnych zobowiązań: C-BEL$_G(\bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G}$ COMM$(i, j, \alpha))$

**Mocne kolektywne zobowiązanie** R-COMM$_{G,P}$

$$\begin{aligned}
&\text{R-COMM}_{G,P}(\varphi) \leftrightarrow \text{C-INT}_G(\varphi) \wedge \\
&\quad constitute(\varphi, P) \wedge \\
&\quad \text{C-BEL}_G(constitute(\varphi, P)) \wedge \\
&\quad \bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G} \text{COMM}(i, j, \alpha) \wedge \\
&\quad \bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G} \text{C-BEL}_G\text{COMM}(i, j, \alpha))
\end{aligned}$$

**Przykład instytucji dla** R-COMM$_{G,P}$

Instytucja złożona z udziałowców

- dzielących odpowiedzialność
- wspólnie planujących, również bilateralne zobowiązania
- wspólnie rewidujących plan, gdy trzeba.

## Rekonfiguracja systemu

Jest strukturalną rewizją planu w dynamicznej sytuacji.

Analiza CPS — model (Wooldridge i Jennings) obejmujący:

- *rozpoznania potencjału*
- *tworzenia grupy*
- *konstruowania planu*
- *realizacji planu*

Realizacja planu = wykonanie akcji w określonych ramach czasowych.

Wymagania zmieniającego się środowiska: **problem rekonfiguracji**, gdy grupa jako całość jest zmuszona do natychmiastowej i efektywnej rewizji planu, jeśli pewni agenci nie są w stanie zrealizować swoich zadań lub gdy pojawiają się nowe, korzystne okoliczności.

## Algorytm rekonfiguracji

- zdefiniowany w kategoriach czterech poziomów CPS i ich interakcji

- realizuje *przeszukiwanie w głąb z nawracaniem*

- realizuje *konserwatywną rewizję* planu:
  często mała korekta (realokacja akcji) może uratować plan

- wyodrębnia przypadki prowadzące do *ewolucji* zobowiązania, opartej na rewizji bilateralnych zobowiązań.

*Metodologiczne podejście do rekonfiguracji: novum w literaturze MAS.*

W **logice dynamicznej** sformułowano i udowodniono twierdzenia dotyczące poszczególnych przypadków, uzyskując **dowód poprawności** algorytmu rekonfiguracji, przy założeniu *więzów wyrażonych przez aksjomaty*.

*Nowe zastosowanie logiki dynamicznej.*

## Ewolucja zobowiązań: przykład

Przypuśćmy, że istnieje para (agent, akcja): $(i, \alpha) \in P$ taka, że $failed(i, \alpha)$, ale że $\alpha$ *nie* blokuje uzyskania $\varphi$. Wówczas, dla aktualnej sekwencji celów $\sigma$ i dla sekwencji akcji $\tau$ oraz dla każdego wspólnego planu $P'$ i sekwencji akcji $\tau'$, istnieją $\sigma'$, $\tau''$ i $P''$ takie, że:

$$
\begin{aligned}
&\text{C-INT}_G(\varphi) \rightarrow \\
&[\texttt{confirm}(failed(\texttt{action-allocation}(\tau, P')))] \\
&[\texttt{confirm}(failed(\text{means-end}(\sigma, \tau')))] \\
&[\texttt{confirm}(succ(\texttt{task-division}(\varphi, \sigma'); \text{means-end}(\sigma', \tau''); \\
&\texttt{action-allocation}(\tau'', P''); \texttt{construction}(\varphi, G, P'')))] \\
&\text{C-COMM}_{G,P''}(\varphi).
\end{aligned}
$$

## Zastosowanie teorii CPS w praktyce: implementacje
## Platforma DORCAS

Program komputerowy do tworzenia, uruchamiania i testowania systemów złożonych z prostych agentów BDI.

Platforma DORCAS jest wyposażona w:

- język do definiowania agentów
- interpreter (PRS, dMARS)
- narzędzia do tworzenia agentów
- symulator świata
- środowisko konfiguracji i monitorowania świata
- narzędzia do uruchamiania agentów w symulowanym świecie.

Agenci wymieniają komunikaty języka KQML (Knowledge, Query and Manipulation Language).

Wprowadzenie kolektywnych postaw motywacyjnych zrealizowano na bazie wzorców wspólnych planów.

Wbudowane narzędzie pozwala śledzić przebieg fazy rozpoznania potencjału oraz tworzenia kolektywnych intencji z perspektywy agenta.

*(raport techniczny)*

## Implementacja algorytmu rekonfiguracji

Systemie o architekturze PRS (DORCAS) zawierający

- standardową bibliotekę planów
- strukturę intencji
- kolejka zdarzeń
- bazę przekonań rozszerzoną o kolektywne postawy motywacyjne.

Realizacja rekonfiguracji działań agentów obejmuje:

- poziom modyfikacji realizowanego planu
- zmianę odpowiedzialności agentów za akcje cząstkowe
- reorganizację zespołu.

Na każdym poziomie rekonfiguracja przebiega *konserwatywnie* poprzez wykonanie jedynie niezbędnych zmian.

Przykład rekonfiguracji: sytuacja awaryjna "człowiek za burtą" na morzu.

## Implementacje: System Re-Team

System implementuje etap *rozpoznania potencjalu* i *tworzenia grupy* w oparciu o dynamicznie rekonfigurujące się zespoły agentów.

Optymalna dla danego stanu środowiska i zadanego celu struktura zespołów obliczana jest przez jeden z algorytmów hierarchicznego grupowania agentów.

Uzyskane wyniki eksperymentalne pokazują, że system jest w stanie adekwatnie modelować np. strategie realizacji intencji i zobowiązań.

Docelowo zaplanowana jako jeden z modułów systemu wieloagentowego.

*(przygotowany artykuł)*

## Implementacje: System CCAinCT

(Collectively Cognitive Agents in Cooperative Teams)

System do badania zależności pomiędzy zastosowanym typem *kolektywnych zobowiązań*, a *zaufaniem* w grupie współpracujących agentów.

Cel: badanie ewolucji zaufania pomiędzy agentami, poprzez badanie zmian średniego poziomu różnicy pomiędzy subiektywnymi, a obiektywnymi wartościami obrazującymi zdolności agentów w trakcie współpracy.

W następnym kroku system bada skłonność agentów do podejmowania ryzyka realizacji zadania w zależności od przyjętego modelu kolektywnego zobowiązania.

W przykładowej aplikacji zakłada się, że w środowisku istnieją dwie grupy agentów (zarządcy i robotnicy), którzy realizują uproszczoną wersję Contract-Net Protocol.

*(opublikowany artykuł)*

**Logical system for the modal operators**

**General axiom and rule**

**P1** All instantiations of propositional tautologies;

**PR1** From $\varphi$ and $\varphi \to \psi$, derive $\psi$;

**Axioms and rules for individual and collective belief**

**A2** $\mathsf{BEL}(i, \varphi) \wedge \mathsf{BEL}(i, \varphi \to \psi) \to \mathsf{BEL}(i, \psi)$

**A4** $\mathsf{BEL}(i, \varphi) \to \mathsf{BEL}(i, \mathsf{BEL}(i, \varphi))$

**A5** $\neg\mathsf{BEL}(i, \varphi) \to \mathsf{BEL}(i, \neg\mathsf{BEL}(i, \varphi))$

**A6** $\neg\mathsf{BEL}(i, \bot)$

**R1** From $\varphi$ and $\varphi \to \psi$ infer $\psi$

**C1** $\mathsf{E\text{-}BEL}_G(\varphi) \leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} \mathsf{BEL}(i, \varphi)$

**C2** $\mathsf{C\text{-}BEL}_G(\varphi) \leftrightarrow \mathsf{E\text{-}BEL}_G(\varphi \wedge \mathsf{C\text{-}BEL}_G(\varphi))$

**RC1** From $\varphi \to \mathsf{E\text{-}BEL}_G(\psi \wedge \varphi)$ infer $\varphi \to \mathsf{C\text{-}BEL}_G(\psi)$

**R2** From $\varphi$ infer $\mathsf{BEL}(i, \varphi)$

**Axioms for individual motivational operators**

**A2**$_D$ $\mathsf{GOAL}(i, \varphi) \wedge \mathsf{GOAL}(i, \varphi \to \psi) \to \mathsf{GOAL}(i, \psi)$

**A2**$_I$ $\mathsf{INT}(i, \varphi) \wedge \mathsf{INT}(i, \varphi \to \psi) \to \mathsf{INT}(i, \psi)$

**R2**$_D$ From $\varphi$ infer $\mathsf{GOAL}(i, \varphi)$

**R2**$_I$ From $\varphi$ infer $\mathsf{INT}(i, \varphi)$

**A6**$_I$ $\neg\mathsf{INT}(i, \bot)$ for $i = 1, \ldots, n$

**Interdependencies between intentions and other attitudes**

**A7**$_{DB}$ $\mathsf{GOAL}(i, \varphi) \to \mathsf{BEL}(i, \mathsf{GOAL}(i, \varphi))$

**A7**$_{IB}$ $\mathsf{INT}(i, \varphi) \to \mathsf{BEL}(i, \mathsf{INT}(i, \varphi))$

**A8**$_{DB}$ $\neg\mathsf{GOAL}(i, \varphi) \to \mathsf{BEL}(i, \neg\mathsf{GOAL}(i, \varphi))$

**A8**$_{IB}$ $\neg\mathsf{INT}(i, \varphi) \to \mathsf{BEL}(i, \neg\mathsf{INT}(i, \varphi))$

**A9**$_{ID}$ $\mathsf{INT}(i, \varphi) \to \mathsf{GOAL}(i, \varphi)$

**Axioms for social commitments**

Social commitments wrt. propositions:

**SC1** $\text{COMM}(i, j, \varphi) \leftrightarrow \text{INT}(i, \varphi) \wedge \text{GOAL}(j, \texttt{stit}(i, \varphi)) \wedge$
$\text{C-BEL}_{\{i,j\}}(\text{INT}(i, \varphi) \wedge \text{GOAL}(j, \texttt{stit}(i, \varphi)))$

where $\texttt{stit}(i, \varphi)$ means that agent $i$ sees to it (takes care) that $\varphi$ becomes true.

Social commitments wrt. actions:

**SC2** $\text{COMM}(i, j, \alpha) \leftrightarrow \text{INT}(i, \alpha) \wedge \text{GOAL}(j, done(i, \alpha)) \wedge$
$\text{C-BEL}_{\{i,j\}}(\text{INT}(i, \alpha) \wedge \text{GOAL}(j, done(i, \alpha)))$

**Axioms and rule for mutual and collective intentions**

**M1** $\text{E-INT}_G(\varphi) \leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} \text{INT}(i, \varphi)$.

**M2** $\text{M-INT}_G(\varphi) \leftrightarrow \text{E-INT}_G(\varphi \wedge \text{M-INT}_G(\varphi))$

**M3** $\text{C-INT}_G(\varphi) \leftrightarrow \text{M-INT}_G(\varphi) \wedge \text{C-BEL}_G(\text{M-INT}_G(\varphi))$

**RM1** From $\varphi \to \text{E-INT}_G(\psi \wedge \varphi)$ infer $\varphi \to \text{M-INT}_G(\psi)$

**Robust collective commitment** R-COMM$_{G,P}$

$$
\begin{aligned}
&\text{R-COMM}_{G,P}(\varphi) \leftrightarrow \text{C-INT}_G(\varphi) \wedge \\
&\quad constitute(\varphi, P) \wedge \\
&\quad \text{C-BEL}_G(constitute(\varphi, P)) \wedge \\
&\quad \bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G} \text{COMM}(i, j, \alpha) \wedge \\
&\quad \bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G} \text{C-BEL}_G\text{COMM}(i, j, \alpha))
\end{aligned}
$$

**Strong collective commitment** S-COMM$_{G,P}$

$$
\begin{aligned}
&\text{S-COMM}_{G,P}(\varphi) \leftrightarrow \text{C-INT}_G(\varphi) \wedge \\
&\quad constitute(\varphi, P) \wedge \\
&\quad \text{C-BEL}_G(constitute(\varphi, P)) \wedge \\
&\quad \bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G} \text{COMM}(i, j, \alpha) \wedge \\
&\quad \text{C-BEL}_G(\bigwedge_{\alpha \in P} \bigvee_{i,j \in G} \text{COMM}(i, j, \alpha))
\end{aligned}
$$

**Weak collective commitment** W-COMM$_{G,P}$

$$\begin{aligned}&\text{W-COMM}_{G,P}(\varphi) \leftrightarrow \text{C-INT}_G(\varphi)\wedge\\&\quad constitute(\varphi, P) \wedge\\&\quad \bigwedge_{\alpha\in P}\bigvee_{i,j\in G} \text{COMM}(i,j,\alpha) \wedge\\&\quad \text{C-BEL}_G(\bigwedge_{\alpha\in P}\bigvee_{i,j\in G} \text{COMM}(i,j,\alpha))\end{aligned}$$

**Team commitment** T-COMM$_{G,P}(\varphi)$

$$\begin{aligned}&\text{T-COMM}_{G,P}(\varphi) \leftrightarrow \text{C-INT}_G(\varphi)\wedge\\&\quad constitute(\varphi, P) \wedge\\&\quad \wedge \bigwedge_{\alpha\in P}\bigvee_{i,j\in G} \text{COMM}(i,j,\alpha)\end{aligned}$$

**Distributed commitment** D-COMM$_{G,P}(\varphi)$

$$\begin{aligned}&\text{D-COMM}_{G,P}(\varphi) \leftrightarrow constitute(\varphi, P)\wedge\\&\quad \wedge \bigwedge_{\alpha\in P}\bigvee_{i,j\in G} \text{COMM}(i,j,\alpha).)\end{aligned}$$

**Semantics for mutual intentions**

- $\text{E-INT}_G^1(\varphi)$ abbreviates $\text{E-INT}_G(\varphi)$
- $\text{E-INT}_G^{k+1}(\varphi)$ abbreviates $\text{E-INT}_G(\text{E-INT}_G^k(\varphi))$

Thus: $w \models \text{M-INT}_G(\varphi)$ iff $w \models \text{E-INT}_G^k(\varphi)$ for all $k \geq 1$.

Define world $t$ to be $G$-*reachable* from world $s$ if there is a path in the Kripke model from $s$ to $t$ along accessibility arrows $I_i$ associated with members $i$ of $G$:

$s \models \text{M-INT}_G(\varphi)$ iff $t \models \varphi$ for all $t$ that are $G$-reachable from $s$.

The axiom system $KD_n^{\text{M-INT}_G}$ is sound and complete with respect to Kripke models where all $n$ accessibility relations $I_i$ are serial.