Ćwiczenia – 26.03.2012.

Zadania oznaczone literą K należy oddawać pisemnie. Niektóre z nich mogą być trochę trudniejsze. Pozostałe są do przemyślenia.

Przypominam, że za każde zadanie przedstawione przy tablicy jest jeden punkt.

Uwaga 1. W każdym z poniższych zadań może występować inna definicja transformaty Fouriera (różnią się one stałą). Należy się domyśleć o jaką definicję transformaty chodzi (tak żeby zadanie dało się zrobić).

Zadanie 1. Transformata Fouriera $\mathcal{F}$ jest operatorem ciągłym z $L_1(\mathbb{R})$ w $C_0(\mathbb{R})$. Czy jest to operator zwarty?

Zadanie 2. $f \in L_1([0,1])$ t. że $f(t) = 0$ dla $t < \delta$. Udowodnij, że pewna potęga f w sensie mnożenia splotowego jest zerem.

Zadanie 3. Pokazać, że dla $p > 1$ oraz $f \neq 0$

$$\inf_k \left\| \underline{f * f \ldots * f}_{k \text{ razy}} \right\|_p^{1/k} > 0$$

Zadanie 4. . $f \in L^1$, $|f(x) - f(0)| = O\left((\log \frac{1}{|x|})^{-1-\varepsilon}\right)$ dla $x \to 0$, $\varepsilon > 0$. Pokazać, że $\sum \widehat{f}(n) = f(0)$

Zadanie 5. Pokazać, że szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ jest szeregiem Fouriera funkcji całkowalnej, a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ nie jest!

Zadanie 6. Pokazać, że dla każdej $f \in L_2(\mathbb{T})$ istnieją $f_1, f_2 \in L_2(\mathbb{T})$ takie, że $f_1 * f_2 = f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_n |\hat{f}(n)| < \infty$.

Zadanie 7. Operator $A : C[0,1] \to C[0,1]$ zadany jest wzorem:

$$A(f)(t) = f(t) - \lambda \int_0^1 K(\tau, t) f(\tau) d\tau$$

gdzie $K(\tau, t) = \varphi(t)\gamma(\tau)$ dla pewnych $\varphi,\ \gamma \in C[0,1]$ i $\lambda \neq 0$. Udowodnij, że jeśli $\int_0^1 \varphi(t)\gamma(t) dt \neq \frac{1}{\lambda}$, to A jest odwracalne.

Zadanie 8. Który z poniższych operatorów $A : C[0,1] \to C[0,1]$ jest zwarty?

1. $A(f)(t) = tf(t)$,
2. $A(f)(t) = \int_0^t \tau f(\tau) d\tau$
3. $A(f)(t) = f(0) + tf(\frac{1}{2}) + t^2 f(1)$

4. $A(f)(t) = t\int_0^1 e^{ts} f(s) ds$
5. $A(f)(t) = f(t^2)$

Zadanie 9. $f : [0,1] \to L_2[0,1]$ jest ciągła. Udowodnij, że wzór $T(h)(x) =< h, f(x) >$ zadaje liniowy i zwarty operator z $L_2[0,1] \to C[0,1]$.

Zadanie 10. T jest operatorem zwartym z $L_2[0,1]$ w $C(K)$ ($C[0,1]$ wystarczy). Udowodnij, że istnieje funkcja ciągła $f : K \to L_2[0,1]$ taka, że dla każdego $h \in L_2[0,1]$ mamy $T(h)(x) =< h, f(x) >$. Porównaj z zadaniem powyżej.

Definicja 1. *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Dla $S \subset X$ definiujemy miarę niezwartości zbioru S jako infimum tych dodatnich epsilonów, dla których istnieje skończone pokrycie S kulami o promieniu epsilon.*

K 6. Niech K – zbiór wypukły, domknięty, ograniczony w przestrzeni Banacha oraz $F : K \to K$ – odwzorowanie ciągłe o własności: istnieje liczba $0 < \lambda < 1$ taka, że dla dowolnego $S \subset K$ zachodzi oszacowanie $\kappa(F(S)) \leq \lambda\kappa(S)$. Pokazać, że wówczas F ma punkt stały w K.