**Ćwiczenia – 27.02.2012.**
*Zadania oznaczone literą K należy oddawać pisemnie. Niektóre z nich mogą być trochę trudniejsze. Pozostałe są do przemyślenia.*
**Przypominam, że za każde zadanie przedstawione przy tablicy jest jeden punkt.**

**Definicja 0.1.** *Niech $(X, Y)$ – para dualna oraz $A \subset X$, $B \subset Y$. Zbiory*

$$A^p := \{y \in Y : |< x, y >| \leq 1, \text{ dla wszystkich } x \in X\},$$
$$B^d := \{x \in X : |< x, y >| \leq 1, \text{ dla wszystkich } y \in Y\}$$

*nazwiemy odpowiednio* polarem *zbioru $A$ oraz* polarem* *zbioru $B$.*

**Zadanie 1.** Pokazać, że w przestrzeni lokalnie wypukłej zbiór $A$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x' \in X'$ zbiór $x'(A)$ jest ograniczony (można też poświęcić 0,08 sekundy na znalezienie kontrprzykładu świadczącego, że założenie lokalnej wypukłości jest tu istotne).

**Zadanie 2** (Po co nam polary?)**. (a)** Niech $(X, Y)$ – para dualna oraz niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną podzbiorów $X$. Załóżmy nadto, że:

1. każdy $A \in \mathcal{A}$ jest ograniczony,
2. $\forall_{A,B \in \mathcal{A}} \exists_{C \in \mathcal{A}}$ takie, że $A \cup B \subset C$,
3. $\forall_{A \in \mathcal{A}} \exists_{C \in \mathcal{A}}$ takie, że $A \subset \frac{C}{2}$,
4. $\bigcup_{\mathcal{A}} A$ jest zbiorem totalnym t.j., zachodzi warunek: dla każdego $y \in Y$ jeśli $< x, y >= 0$ dla wszystkich $x \in \bigcup_{\mathcal{A}} A$ to $y = 0$.

Pokazać, że $\{A^p : A \in \mathcal{A}\}$ zadaje na $Y$ strukturę przestrzeni liniowo topologicznej lokalnie wypukłej, Hausdorffa.

**(b)** Jakie topologie zadają następujące rodziny zbiorów:

1. $\{A^p : A \in \mathcal{A}\}$, gdy $\mathcal{A}$ – wszystkie skończone podzbiory $X$,
2. $\{B^d : B \in \mathcal{B}\}$, gdy $\mathcal{B}$ – wszystkie skończone podzbiory $Y = X'$,
3. $\{B^d : B \in \mathcal{B}\}$, gdy $\mathcal{B}$ – wszystkie ograniczone podzbiory $Y = X'$.

Powyżej zakładamy oczywiście, że rodziny $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ spełniają założenia punktu (a) (znów można zastanowić się nad kontrprzykładem, czyli parą dualną $(X, Y)$, dla której punkt (b) się sypie).

**Zadanie 3.** Pokazać, że na $\mathbb{R}^n$ polarem sympleksu $n$–wymiarowego jest sympleks $n$–wymiarowy.

**Zadanie 4.** To zadanie pojawi się w najbliższym czasie (lub nie).

**K 3.** **(a)** Pokazać, że na przestrzeni Hilberta nie jest prawdą, że każde dwa rozłączne, wypukłe i domknięte zbiory (nazwijmy je $A, B$) można oddzielić za pomocą funkcjonału liniowego ciągłego, czyli, że nie zawsze istnieje $\phi$ liniowy ciągły taki, że

$$\sup_A \phi(x) \leq \inf_B \phi(x).$$

*(1p.)*

**(b)** Czy jeśli z treści punktu (a) wykreślimy wszystkie wystąpienia słów: 'ciągłego' i 'ciągły', to nadal będzie to prawda? *(2p.)*

**Zadanie z *.** $K$– zbiór zwarty, wypukły, niepusty w przestrzeni lokalnie wypukłej $X$ (jak zwykle – Hausdorffa). Niech $F$ będzie funkcją wielowartościową tzn. $F : K \to 2^K$, przy czym dla każdego $x \in K$ zbiór $F(x)$ jest domknięty, wypukły i niepusty. Ponadto w każdym $x_0 \in K$ zachodzi warunek dolnej półciągłości: dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset X$ takiego, że $U \cap F(x_0) \neq \emptyset$ istnieje otoczenie zera $V$ takie, że $U \cap F(x) \neq \emptyset$ dla wszystkich $x \in x_0 + V$. Pokazać, że $F$ ma punkt stały, czyli taki punkt $p \in K$, że $p \in F(p)$.

**Zadanie 5** (To zadanie akurat da się zrobić)**.** Pokazać, że jeśli w zadaniu powyżej zamienimy dolną półciągłość na górną półciągłość to istnieje punkt stały. Półciągłość z góry: dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ takiego, że $F(x_0) \subset U$ istnieje otoczenie zera $V$ takie, że $F(x) \subset U$ dla wszystkich $x \in x_0 + V$.
*Wskazówka: przy założeniach zawartych w treści zadania funkcja* $f(x) := \sup_{y \in F(x)} \operatorname{Re} x'(y)$ *jest funckją półciągłą z góry w zwykłym (rzeczywistym) sensie.*

**Zadanie 6.** Udowodnić wskazówkę z zadania powyżej (dla tych, którzy mają kłopot ze zrobieniem całego zadania).