Ćwiczenia – 20.02.2012

Zadania oznaczone literą K należy oddawać pisemnie. Niektóre z nich mogą być trochę trudniejsze. Pozostałe są do przemyślenia.

Przypominam, że za każde zadanie przedstawione przy tablicy jest jeden punkt.

Zadanie 1. Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, zaś K_i $(i = 1, 2, ...)$ zwartymi podzbiorami Ω takimi, że $K_i \subset \text{int}K_{i+1}$ oraz $\bigcup K_i = \Omega$. Rozważmy przestrzeń $C^\infty(\Omega)$ z topologią zadaną przez półnormy:

$$p_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : \; x \in K_N, \; |\alpha| \leq N\}. \tag{0.1}$$

(a) Pokazać, że p_N są półnormami dla $N = 1, 2, ...$ oraz że topologia przez nie zadana jest lokalnie wypukła i metryzowalna,

(b) Pokazać, że jeśli K jest zwartym podzbiorem Ω to przestrzeń $\mathcal{D}_K$ złożona z funkcji gładkich o nośnikach zawartych w K jest domkniętą podprzestrzenią $C^\infty(\Omega)$,

(c) Pokazać, że powyższa topologia na $C^\infty(\Omega)$ jest zupełna,

(d) Pokazać, że w tej topologii $C^\infty(\Omega)$ nie jest przestrzenią lokalnie ograniczoną.

Wskazówka do (d): Można np. pokazać, że $C^\infty(\Omega)$ z zadaną powyżej topologią ma własność Heinego-Borela (czyli zbiory domknięte i ograniczone są zwarte) i skorzystać z Zadania 5. z poprzednich ćwiczeń.

Zadanie 2 (Udowodnić lemat z wykładu)**.** Niech X będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo topologiczną, zaś $V_1, V_2 \subset X$ rozłącznymi zbiorami wypukłymi, przy czym V_1–otwartym. Wówczas istnieje $x^{'} \in X^{'}$ taki, że $\text{Re}x^{'}(x_1) < \text{Re}x^{'}(x_2)$ dla wszystkich $x_1 \in V_1$ i $x_2 \in V_2$.

Zadanie 3. Niech K będzie zbiorem zwartym, wypukłym i niepustym w lokalnie wypukłej przestrzeni liniowo topologicznej X, zaś $V \in \mathcal{B}_0$ (zakładamy tutaj oczywiście, że $\mathcal{B}_0$ składa się ze zbiorów wypukłych). Pokazać, że istnieje odwzorowanie ciągłe $g : K \to H$, gdzie H jest pewnym sympleksem zawartym w K takie, że $x - g(x) \in V$ dla wszystkich $x \in K$.
Wskazówka: Rozważyć funkcję $\alpha(x) = \max\{0, 1 - \mu_V(x)\}$ i pokombinować z całkowitą ograniczonością K i wypukłością V.

Zadanie 4. Niech l^p dla $0 < p < \infty$ będzie przestrzenią funkcji x na zbiorze liczb naturalnych spełniających

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid x(n) \mid^p < \infty$$

. Dla $1 \leq p < \infty$ niech $||x||_p = \{\sum |x(n)|^p\}^{\frac{1}{p}}$.

1. Udowodnij, że dla $1 < p < \infty$ prestrzeń l^p zawiera ciągi słabo zbieżne, ale nie mocno zbieżne.

2. Wykaż, że każdy słabo zbieżny ciąg w l^1 jest zbieżny w mocnej topologii.

3. Dla $0 < p < 1$ udowodnij, że l^p jest przestrzenią metryczną z metryką

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)|^p$$

   i że z tą metryką jest ona lokalnie ograniczoną F przestrzenią, która nie jest lokalnie wypukła, ale $(l^p)^*$ rozdziela punkty l^p (czyli, że w l^p jest dużo zbiorów wypukłych, ale nie wystarczająco dużo by utworzyć bazę topologii).

Zadanie 5. Wykaż twierdzenie z wykładu: Niech (X, τ_P), (Y, τ_Q) dwie lokalnie wypukłe przestrzenie oraz T operator liniowy $T : X \to Y$. Następujące warunki są równoważne:

1. T jest ciągły,

2. T jest ciągły w zerze,

3. jeżeli q jest ciągłą półnormą na Y to $q \circ T$ jest ciągłą półnormą na X,

4. dla każdej $q \in Q$ istnieje skończony układ $F \subset P$ oraz $M \geq 0$ t. że $q(Tx) \leq M \max_{p \in F} p(x)$ $\forall x \in X$.

K 2. Niech X będzie przestrzenią liniowo topologiczną (Hausdorffa). Pokazać, że topologia w X jest zadana przez quasinormę p-jednorodną wtedy i tylko wtedy, gdy posiada ograniczone otoczenie zera.