1 Ćwiczenia – 13.02.2012

Zadania oznaczone literą K należy oddawać pisemnie. Niektóre z nich mogą być trochę trudniejsze. Pozostałe są do przemyślenia.

Zadanie 1. Niech U będzie otoczeniem zera w przestrzeni liniowo topologicznej X, zaś μ_U odpowiadającym mu funkcjonałem Minkowskiego. Jakie własności μ_U implikują poniższe własności otoczenia U:

1. U jest ograniczone,
2. U jest pochłaniające,
3. U jest zaokrąglone,
4. U jest wypukłe.

Zadanie 2. Pokazać, że przestrzeń liniowo topologiczna jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy posiada przeliczalną bazę otoczeń zera.

Zadanie 3. Pokazać, że przestrzenie $L_p[0,1]$ dla $0 < p < 1$ są F^*-przestrzeniami. Udowodnić wersję twierdzenia Riesza o reprezentacji dla tych przestrzeni (to jest dość *trywialne*).

$$L_p[0,1] := \{f : [0,1] \to K : \ f - \text{mierzalna}, \ \int_0^1 |f|^p dx < \infty\}.$$

Zadanie 4. Udowodnić, że w przestrzeni liniowo topologicznej, lokalnie wypukłej, jeśli S jest zbiorem całkowicie ograniczonym, wówczas $\mathrm{conv}(S)$ również jest zbiorem całkowicie ograniczonym.

Zadanie 5 (Wspomnienie z AF1)**.** Udowodnić, że każda przestrzeń liniowo topologiczna, lokalnie zwarta jest skończenie wymiarowa. Jeśli się zna to zadanie to pomyśleć nad możliwie prostym dowodem.

K 1. Niech funkcja $f : X \to [0, \infty)$ wyznaczająca topologię w przestrzeni liniowej, topologicznej X (tzn. $f(x) \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \to 0$ dla $x \in X$, uwaga: X nie koniecznie jest przestrzenią liniowo topologiczną) spełnia warunki:

1. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
2. jeśli $x_n \to 0$ w X, to dla wszystkich $k \in K$, $kx_n \to 0$,
3. jeśli $k_n \to 0$ w K, to dla wszystkich $x \in X$, $k_n x \to 0$,

gdzie K jest (rzecz jasna) ciałem skalarów przestrzeni X.

(a) Pokazać, że jeśli $k_n \to 0$ w K i $x_n \to 0$ w X to $k_n x_n \to 0$ w X. (3p.)

(b) Podać przykłady wykazujące, że aby punkt (a) pozostał prawdziwy, każde z założeń 1., 2., 3. jest konieczne (lub udowodnić, że dane założenie niezbędne wcale nie jest). (2p.)

Zadanie 6 (Równoważność definicji)**.** Przestrzeń liniowo topologiczna posiada bazę topologiczną, która z uwagi na liniowość jest charakteryzowana jednoznacznie przez bazę otoczeń zera. Pokazać, że ciągłość mnożenia przez skalar w przestrzeni liniowo topologicznej jest równoważna istnieniu bazy zbalansowanych otoczeń zera, zaś ciągłość dodawania jest równoważna warunkowi:

$$\forall_{U \in \mathcal{B}_0} \exists_{V \in \mathcal{B}_0} : \; V + V \subset U.$$

Zadanie 7 (I jeszcze raz)**.** Pokazać, że przestrzeń liniowo topologiczna jest lokalnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy posiada bazę otoczeń zera złożoną ze zbiorów wypukłych.