Twierdzenie Menelaosa

Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, zaś punkt F na przedłużeniu boku AB. Punkty D, E, F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.

1. Udowodnij twierdzenie Menelaosa.

2. Korzystając z twierdzenia Menelaosa, udowodnij twierdzenie Cevy.

3. Współliniowe punkty D, E, F leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB, zawierających boki trójkąta ABC. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB, zaś punkty D', E', F' — obrazami symetrycznymi punktów odpowiednio D, E, F w symetriach odpowiednio względem K, L, M. Wykaż, że punkty D', E', F' są współliniowe.

4. *(Tw. o spodkach 3 dwusiecznych)* W trójkącie ABC punkty D, E są spodkami dwusiecznych kątów wewnętrznych przy wierzchołkach odpowiednio A i B. Punkt F jest spodkiem dwusiecznej zewnętrznej kąta przy wierzchołku C. Wykaż, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.

5. *(Tw. Van Aubela)* Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC, proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie P. Wykaż, że wówczas $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$.

6. Co można wywnioskować z powyższego twierdzenia Van Aubela w przypadku, gdy proste AD, BE, CF są, w trójkącie ABC,
(a) środkowymi?
(b) dwusiecznymi?

7. Sfera $\mathcal{S}$ jest styczna do krawędzi AB, BC, CD i DA czworościanu $ABCD$ odpowiednio w punktach K, L, M i N. Udowodnij, że K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie.

8. *(Prosta Simsona)* Udowodnij, że spodki prostopadłych opuszczonych z dowolnego punktu okręgu na boki trójkąta wpisanego leżą na jednej prostej.

9. *(Tw. o składaniu jednokładności)* Udowodnij, że złożenie jednokładności o środku O_1 i skali k_1 z jednokładnością o środku $O_2 \neq O_1$ i skali $k_2 \neq \frac{1}{k_1}$ jest jednokładnością o środku na prostej O_1O_2 i o skali k_1k_2. Co się dzieje, gdy $O_2 = O_1$ lub $k_2 = \frac{1}{k_1}$?

Twierdzenie Cevy

Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

10. Udowodnij, że proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta i dzielące przeciwległe boki proporcjonalnie do wielkości kątów przyległych przecinają się w jednym punkcie.

11. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $\measuredangle ADB = 90^\circ$ oraz $\measuredangle ADE = \measuredangle ADF$. Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.