Zasada szufladkowa Dirichleta raz jeszcze

1. Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporczykami 100 różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy stole w sposób losowy, ale tak, że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

2. Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać pewne dwie z nich tak, aby ich różnica była postaci $\overline{aa}$ (gdzie a jest cyfrą).

3. Liczby $a_1, \ldots, a_5$ są całkowite, liczby $b_1, \ldots, b_5$ to te same liczby ustawione w innej kolejności. Udowodnij, że liczba $(a_1 - b_1) \ldots (a_5 - b_5)$ jest parzysta.

4. Mamy dany pewien zbiór 2009 liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać takie trzy liczby a, b, c z tego zbioru, aby liczba $a(b - c)$ była podzielna przez 2009.

5. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 2 wybrano 5 punktów. Wykaż, że pewne 2 spośród nich są odległe o co najwyżej 1.

6. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że pewne trzy z tych punktów tworzą trójkąt o obwodzie nie większym niż 3.

7. Każdy wierzchołek jedenastokąta foremnego pomalowano na jeden z czterech kolorów. Udowodnij, że można wybrać pięć kolejnych wierzchołków, pomalowanych co najwyżej trzema kolorami.

8. Każdy punkt okręgu pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt równoramienny, wpisany w ten okrąg, o wszystkich trzech wierzchołkach jednego koloru.

9. Na płaszczyźnie danych jest 10 prostych, z których żadne dwie nie są równoległe. Wykaż, że wtedy pewne dwie z nich przecinają się pod kątem nie większym niż $18°$.

10. Ponad połowę powierzchni pewnej sfery pomalowano na niebiesko. Udowodnij, że istnieje taka średnica tej sfery, której obydwa końce są niebieskie.

Więcej o zasadzie szufladkowej Dirichleta, w tym treści i rozwiązania zadań z poprzednich zajęć na ten temat, znaleźć można w moim artykule, stanowiącym dodatek do broszury *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów 2005/2006*, Warszawa 2008.