

Zadania Dodatkowe

Zadania nie są obowiązkowe.

Każde zadanie jest warte **1** punkt.

Można oddać do **2** zadań.

Termin oddawania: czwartek **22.I** - ostatnie zajęcia

Zadanie 1 (Produkt).

Niech X będzie zbiorem, a $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dwiema topologiami na X .

a) Udowodnij, że rodzina

$$\mathcal{B} = \{ V \subseteq X \mid \text{istnieją } U_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ i } U_2 \in \mathcal{T}_2 \text{ takie, że } V = U_1 \cap U_2 \}$$

jest bazą pewnej topologii $\mathcal{T}$ na X .

b) Pokaż, że przestrzeń X z topologią $\mathcal{T}$ jest homeomorficzna z

$$S = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

z topologią podprzestrzeni w produkcie $X \times X$, gdzie pierwszy składnik ma topologię $\mathcal{T}_1$, a drugi $\mathcal{T}_2$.

Zadanie 2 (Przestrzeń ilorazowe).

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Rozważmy relację równoważności na $X \times [-1, 1]$ zadaną przez:

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \iff ((x_1, t_1) = (x_2, t_2)) \vee (t_1 = t_2 = 1) \vee (t_1 = t_2 = -1).$$

Definiujemy zawieszenie X jako przestrzeń ilorazową

$$\Sigma X := X \times [-1, 1] / \sim.$$

Niech S^1 będzie okręgiem, a S^2 sferą:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Skonstruować ciągłą bijekcję $\Sigma S^1 \rightarrow S^2$. Uzasadnić, że jest to homeomorfizm.

Zadanie 3 (Spójność).

Dla przestrzeni X zdefiniujemy stożek nad X jako

$$CX := X \times [0, 1] / X \times \{1\}.$$

a) Uzasadnić, że dla dowolnej przestrzeni X stożek CX jest łukowo spójny.

b) Niech

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

będzie okręgiem jednostkowym. Uzasadnij, że dla dowolnego punktu ze stożka $a \in CS^1$ przestrzeń bez punktu $CS^1 - \{a\}$ jest łukowo spójna.

c) Niech $Y = S^1 \sqcup S^1$. Uzasadnij, że stożki CY i CS^1 nie są homeomorficzne.

Zadanie 4 (Zwartość).

Niech $B = B((0,0);1) \subset (\mathbb{R}^2, d_{eu})$ będzie otwartą kulą euklidesową o środku $(0,0)$ i promieniu 1. Niech $X = B \cup \{\infty\}$. Niech $\mathcal{T}_X$ będzie rodziną podzbiorów X daną przez

$$U \in \mathcal{T}_X \iff \begin{cases} \infty \notin U, \text{ oraz } U \text{ jest otwarty w } B, \text{ lub} \\ \infty \in U, \text{ oraz } B - U \text{ jest zwarty.} \end{cases}$$

a) Uzasadnij, że $\mathcal{T}_X$ to topologia na X .

b) Wykaż, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest zwarta.

Uwaga: Przypominam, że w definicji zwartości zawiera się warunek Hausdorffa.

Zadanie 5 (Zupełność).

Udowodnić, że istnieje punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ taki, że dla każdego niezerowego wielomianu o współczynnikach wymiernych $W \in \mathbb{Q}[x,y], W \neq 0$ zachodzi

$$W(x,y) \neq 0.$$